

Métodos Matemáticos 2

Proyectos de Métodos Numéricos

L. A. Núñez*

*Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,
(CECALCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Versión β 1.5 Noviembre 2006

Índice

1. La Propuesta	1
2. Los Proyectos	3
2.1. Proyecto 1: Pateando las Bolas....	3
2.2. Proyecto 2: Las Bolas de Nudillos	4
2.3. Proyecto 3: Los Misiles y Cohetes	5
2.4. Proyecto 4: Polítropos Newtonianos	6
2.5. Proyecto 5: Dispersión bajo Fuerzas Centrales	8

1. La Propuesta

La idea de esta propuesta es, por un lado, percibir las posibilidades de análisis y simulación de situaciones en Física que presentan herramientas como Maple y, por otro realizar

*e-mail: nunez@ula.ve

Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

k	x_k	y_k^{euler}				y_k^{rk4}				y_{rkf45}	ϵ_{rkf45}
		h	ϵ_h	$h/2$	$\epsilon_{h/2}$	h	ϵ_h	$h/2$	$\epsilon_{h/2}$		
1	0	y_1		\dots		y_1		\vdots	y_1		
2	0,1	y_2		\dots		y_2			y_2		
3	0,2	y_5		\dots		y_3			y_3		
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots		
10	1										

Cuadro 1: Cuadro modelo de presentación de los resultados

experimentos numéricos que permitan comparar el alcance y las limitaciones de los métodos numéricos.

Maple provee un comando `dsolve(odesys, numeric, vars, options)` para integrar numéricamente ecuaciones diferenciales. La intención es comparar tres métodos, dos con paso fijo (Euler y Runge Kutta cuarto orden) con pasos de integración $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{100}$, y otro (Runge Kutta Felsberg de 4/5 orden) con paso variable. Este último es el método por omisión que presenta Maple para resolver las ecuaciones numericamente con el comando `dsolve`. Los dos primeros son de paso fijo (por omisión el paso que se supone es $h = \min(\frac{x_0-x_1}{3}, 0,005)$, siendo x_0 y x_1 los puntos entre los cuales se desarrolla la integración). Estos métodos pueden ser utilizados a través de la variante del comando `dsolve(odesys, numeric, method=classical)`, específicamente `method=classical[foreuler]` y `method=classical[rk4]` respectivamente. Consulte la ayuda para los detalles de cada caso.

La idea es resolver cada uno de los problemas por los tres métodos y comparar su precisión. Esto es integrar para cada método de paso fijo con ambos pasos y luego integrar con el método de paso variable. En algunas situaciones se podrá obtener alguna solución analítica y, para ese caso se podrá calibrar el modelo conociendo sus errores. Las columnas $\epsilon_h, \epsilon_{h/2}, \epsilon_{rkf45}$, en el Cuadro 1, permiten expresar los valores de los errores para cada método estudiado. Los resultados deberán ser mostrados en forma de tabla (ver modelo de Cuadro 1) y como en una gráfica.

Para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales es imperioso adimensionalizarlas. No es lo mismo integrar una variable entre 0 y 1 que entre 3 Km y 4 Km. Para algunos ejemplos de formas de adimensionalizar ecuaciones diferenciales y luego integrarlas numéricamente, pueden consultar

<http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/maple/Simulaciones.html>

Como este trabajo se fundamenta en experimentos numéricos, deberá ser entregado formalmente en forma de una hoja de trabajo Maple y como un informe de laboratorio formal.

2. Los Proyectos

2.1. Proyecto 1: Pateando las Bolas....

Siendo este año 2006 el año del mundial de fútbol Alemania 2006, no podíamos evitar plantear las pateadas al arco. Normalmente una buena patada impulsa una de esas pelotas de con una velocidad que oscila entre $25 - 30 \text{ m/s}$ y podemos incorporar un efecto de $8 - 10 \text{ vueltas/s}$. Típicamente, la masa de un balón de fútbol profesional está entre $410 - 450 \text{ g}$ ¹. Les incuyo también una muy reciente referencia en la cual se muestra que no siempre hay que lanzar con 45° para obtener un máximo alcance²

La figura 1 muestra un diagrama de las fuerzas que actúan sobre un balón de football. Las fuerzas que se indentifican son,

- el peso, $m\vec{g}$
- la fuerza de roce, \vec{f}_r la cual la caracterizaremos cuantitativamente con la siguiente relación³

$$\frac{\vec{f}_r}{m} = F(v) v \vec{v} \quad \text{donde } F(v) = 0,0039 + \frac{0,0058}{1 + \exp\left(\frac{v-v_f}{\Delta}\right)} \quad \text{con } v_f = 22 \text{ m/s} \quad \Delta = 5 \text{ m/s}$$

- la fuerza de Magnus⁴ Es la fuerza que se generará sobre un objeto que se desplaza en un fluido y rota sobre su eje. La rotación produce un cambio de presión y afecta la trayectoria del un objeto. Se caracteriza por como

$$f_m = S(v) \vec{\omega} \times \vec{v}$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de rotación y \vec{v} la velocidad de traslación del balón.

Las ecuaciones en componentes quedarán

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= v_x; & \frac{dy(t)}{dt} &= v_y; & \frac{dz(t)}{dt} &= v_z \\ \frac{dv_x(t)}{dt} &= -F(v) v v_x(t) + B\omega (v_z(t)\text{sen } \phi - v_y(t) \text{cos } \phi) \end{aligned}$$

¹Pueden consultar <http://physicsweb.org/articles/world/11/6/8> para una descripción de hace algunos años

²Se puede consultar <http://physicsweb.org/dl/PWJUNE06linthorne.pdf>

³Detalles en <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node43.html>

⁴En honor a Heinrich Magnus quien pro primera vez describió el fenómeno en 1853 sin embargo aparentemente Newton también lo caracterizó detalladamente 180 años antes. Para más detalles pueden consultar a http://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_effect#note-0 y también <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node43.html>.

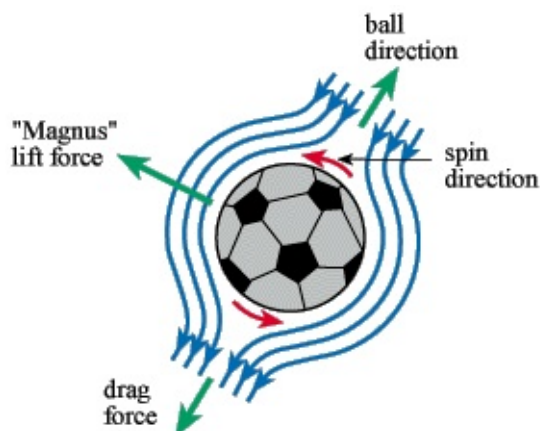


Figura 1: Fuerzas que actúan sobre una pelota de Fútbol. Tomado de http://www.soccerballworld.com/Spinning_Ball.htm

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = -F(v) v v_y(t) + B\omega v_x(t) \cos \phi \quad \frac{dv_z(t)}{dt} = -g - F(v) v v_z(t) - B\omega v_x(t) \sin \phi$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 0; \quad v_x(0) = v_0 \cos \theta; \quad v_y(0) = 0; \quad v_z(0) = v_0 \sin \theta$$

Encuentre las trayectorias de tiros libres fuera del área de *penal* para varios “efectos” de rotación. La intención es hacer un gol por la esquina superior del arco más cercana a sitio de tiro. Grafique las distintas trayectorias para cada una de las condiciones.

2.2. Proyecto 2: Las Bolas de Nudillos

El análisis anterior obviamente también es válido para el desplazamiento de pelotas de béisbol y es de hecho dónde se ha hecho el mayor de los esfuerzos por unir física y afición⁵. Una pelota de béisbol tiene cerca de 150 g de masa y un diámetro de 7,32 cm. El lanzamiento se realiza en una distancia de 18,44 m desarrollando velocidades entre 30 – 45 m/s. Existen una variedad de tipos de lanzamiento y son las costuras sobre la superficie de la pelota las que permiten generar efectos en el lanzamiento. Hay curvas, rectas y la azarosa bola de nudillos⁶ y es precisamente de ese lanzamiento que se tratará esta propuesta. Siguiendo el curso de Física Computacional de Richard Fitzpatrick⁷ notamos que este lanzamiento es lento y con

⁵Pueden consultar **The physics of baseball**, de R.K. Adair (Harper & Row, New York NY, 1990). y el mismo curso de Física Computacional de Richard Fitzpatrick en <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node41.html>

⁶<http://en.wikipedia.org/wiki/Knuckleball>

⁷<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node45.html>

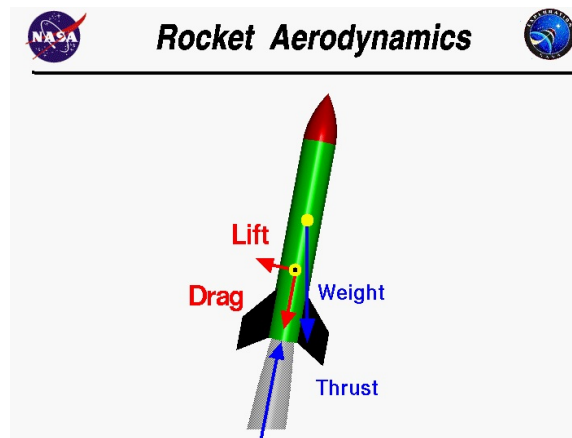


Figura 2: Fuerzas sobre un cohete. Tomado de <http://exploration.grc.nasa.gov/education/rocket/rktaero.html>

muy baja (o ninguna) rotación. Por lo tanto no tendrá importancia la fuerza de Magnus y si una fuerza lateral que puede ser cuantificada como

$$\frac{f_y}{mg} = G(\phi) = 0,5(\sin(4\phi) - 0,25\sin(8\phi) + 0,08\sin(12\phi) - 0,025\sin(16\phi))$$

con lo cual, para este caso, las ecuaciones en componentes quedarán

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x; \quad \frac{dy(t)}{dt} = v_y; \quad \frac{dz(t)}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = -F(v)v v_x(t); \quad \frac{dv_y(t)}{dt} = -F(v)v v_y(t) + G(\phi); \quad \frac{dv_z(t)}{dt} = -g - F(v)v v_z(t)$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 0; \quad v_x(0) = v_0 \cos \theta; \quad v_y(0) = 0; \quad v_z(0) = v_0 \sin \theta$$

Encuentre la trayectoria de la bola de nudillos y gráfiquela. Compárela con los resultados del curso de Fitzpatrick.

2.3. Proyecto 3: Los Misiles y Cohetes

Continuando con la idea de lanzamientos ahora analizaremos el movimiento de un cohete⁸

⁸Puede consultarse <http://exploration.grc.nasa.gov/education/rocket/rktaero.html>

Tal y como se muestra en el diagrama de cuerpo libre en la figura 2, la ecuación para un movimiento vertical, tomando en cuenta una fricción lineal es

$$M(t)\frac{dv(t)}{dt} + u\frac{dM(t)}{dt} = -\eta v(t) - M(t)g \quad (1)$$

La función masa, $M(t)$ se puede expresar como

$$M(t) = \begin{cases} M_v + M_c \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & 0 \leq t \leq \tau \\ M_v & t > \tau \end{cases} \quad (2)$$

donde M_v es la masa del cohete sin combustible y M_c la masa del combustible. Suponiendo los siguiente parámetros

$$M(0) = 5000kg; \quad \tau = 10s; \quad -\frac{dM(t)}{dt} = 100kg/s; \quad u = 2000m/s.$$

Investigue los posibles valores de η , resuelva la ecuación (1) para la función masa (2), y encuentre la gráfica posición vs tiempo para determinar la altura alcanzada por el cohete a los 15s

2.4. Proyecto 4: Polítropos Newtonianos

Las ecuaciones de estructura estelar (muuuuy simplificadas) parten de la suposición que este tipo de estrellas es esférica, con lo cual despreciamos los efectos de rotación, campos magnéticos y demás hierbas que combatan las esfericidad. Así la ecuación de Newton sobre un diferencial de masa pueden ser ex

$$F_{grav} = -\frac{Gm(r)}{r^2}dm \Rightarrow -4\pi r_2^2 P_2 - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV} + 4\pi r_1^2 P_1 = 0$$

donde $4\pi r_2^2 P_2$ y $4\pi r_1^2 P_1$ son las fuerzas de contacto entre las superficies de los diferenciales de masa contiguos; P_1 y P_2 son las presiones del fluido en las superficies de contacto $4\pi r_1^2$ y $4\pi r_2^2$, respectivamente y, finalmente $m(r)$ es la masa encerrada por el cascarón esférico a una distancia r , el cual representa el diferencial de masa bajo el análisis. La ecuación de Newton por unidad de volumen queda escrita como

$$-\frac{P_2}{\Delta r} - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) + \frac{P_1}{\Delta r} = 0 \quad \text{para} \quad \Delta r \equiv r_2 - r_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \frac{dP}{dr} + \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) = 0$$

Tal y como se muestra en la figura 3, si la estrella está en equilibrio hidrostático, resulta que en cada punto el “peso” de un diferencial de masa, dm es balanceado por un gradiente de

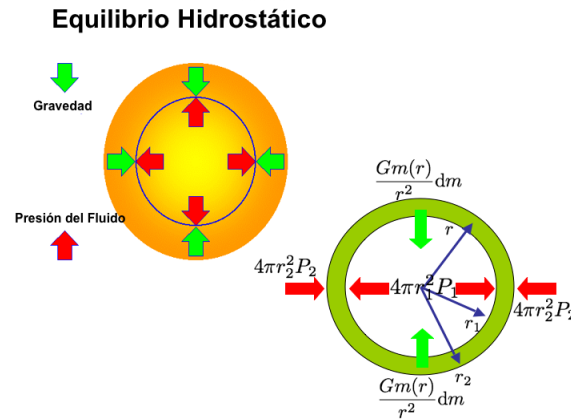


Figura 3: Equilibrio Hidrostático, el peso de una capa de fluido es balanceado por un gradiente de presiones

presiones. Con ello podemos construir un sistema de ecuaciones diferenciales para $m(r)$, $\rho(r)$ y $P(r)$.

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r) \quad \text{y} \quad \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (3)$$

Con lo cual tendremos dos ecuaciones diferenciales para tres funciones. Es imperioso proveer una función adicional que relacione algunas de estas funciones. Ella es la ecuación de estado $P = P(\rho)$. Una forma muy útil de representar una ecuación de estado es suponer una relación polítropa entre presión y densidad. Esto es $P = P_c \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^\Gamma$. Donde P_c será una constante que identificaremos como la presión central, ρ_c otra que asociaremos como la densidad central y, finalmente Γ , el parámetro polítropo, relacionado con la relación entre los calores específicos o, también la velocidad del sonido en el medio. La variación de éste último parámetro nos permite describir varios tipos de materiales. Por ejemplo, luego de introducir éste tipo de ecuación de estado y adimensionalizando las variables $r = R\bar{r}$, $\rho = \rho_c \bar{\rho}$ y $m = M\bar{m}$ ⁹, se pueden obtener un par de soluciones analíticas¹⁰.

$$\text{para } \Gamma = 2 \Rightarrow \bar{\rho} = \bar{\rho}_c \frac{\text{sen } \bar{r}}{\bar{r}} \text{ y para } \Gamma = \frac{6}{5} \Rightarrow \bar{\rho} = \bar{\rho}_c \left(1 + \frac{\bar{r}^2}{3a^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \text{ donde } a = \frac{\sqrt{5}}{\bar{\rho}_c^{\frac{2}{5}}} \quad (4)$$

⁹Los valores típicos (por lo cual se miden en estas unidades) para estas cantidades son los del Sol $R_\odot \approx 6,95 \times 10^{10}$ cm, $M_\odot \approx 1,98 \times 10^{33}$ gr. y $\rho_c \approx 150 \text{ gr/cm}^3$,

¹⁰Este tipo de ecuaciones diferenciales se conoce como de Lane-Emden, para mayor información, consultar <http://scienceworld.wolfram.com/physics/Lane-EmdenEquation.html> y también http://en.wikipedia.org/wiki/Lane-Emden_equation

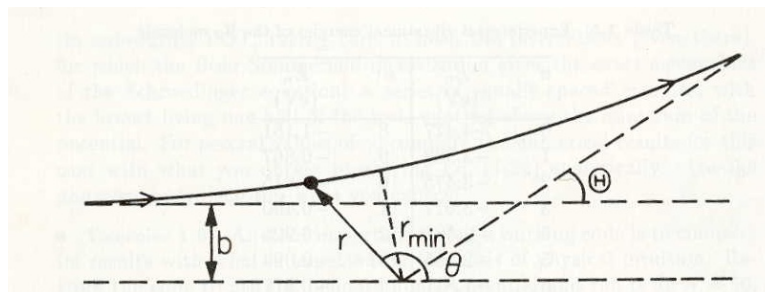


Figura 4: Dispersión bajo fuerzas Centrales

Integre numericamente el sistema de ecuaciones diferenciales (3) para distintos valores del índice polítropo Γ , considerando los métodos indicados en el Cuadro 1, de la página 2. Estime los errores para cada método en los casos particulares de soluciones analíticas para $\Gamma = 2$ y $\Gamma = \frac{6}{5}$ tal y como se muestran en la ecuación (4). Si hizo las cosas bien, su

Un punto interesante de este modelo es la posibilidad de describir “enanas blancas”¹¹, estrellas que han consumido todo su combustible nuclear y cuya atracción gravitatoria es balanceada por el principio de exclusión de Pauli (pueden consultar http://en.wikipedia.org/wiki/White_dwarf o también <http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/known/dwarfs.html>). Podremos distinguir dos tipos de estas estrellas unas de baja densidad $\Gamma = \frac{5}{3}$ y de alta densidad $\Gamma = \frac{4}{3}$. ¿cuáles son los perfiles de densidades y presiones para este tipo de estrellas?

2.5. Proyecto 5: Dispersión bajo Fuerzas Centrales

La idea de este proyecto es estudiar el patrón de dispersión bajo potenciales de fuerzas centrales. Es tradicional en los cursos de Mecánica Clásica estudiar la dispersión bajo potenciales que generan fuerzas Centrales¹². La ecuación diferencial que genera esta dispersión puede escribirse como

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = \pm \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}} \quad \text{con} \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

donde, tal como se muestra en la figura 4, b es el parámetro de impacto, $\theta(r)$, el ángulo de dispersión y v_0 la velocidad inicial de la partícula. Queremos estudiar la dispersión por el

¹¹una descripción muy buena de las implicaciones de los modelos polítropos en estrellas newtonianas puede encontrarlo en el curso de evolución estelar de Onno Pols, del Instituto Astronómico de la Universidad de Utrecht, en los Países Bajos <http://www.astro.uu.nl/~pols/education/STEV/pract1.pdf>

¹²Pueden consultar Herbert Goldstein, Charles P. Poole y John L. Safko, **Classical Mechanics** (3ra Edición) Addison Wesley (2002)

potencial de Lennard-Jones¹³

$$V(r) = 4V_0 \left\{ \left(\frac{1}{r} \right)^{12} - \left(\frac{1}{r} \right)^6 \right\}$$

Encontrar las trayectorias $r = r(\theta)$ para partículas con energías $E = 0,1V_0, 0,5V_0, V_0, 2V_0, \dots, 10V_0$

¹³http://en.wikipedia.org/wiki/Lennard-Jones_potential