El Número de Oro

Francisco Rivero
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

RAZONES Y PROPORCIONES

1.1. Introducción

La conexión entre números y figuras geométricas ha sido uno de los grandes logros de la matemática antigua. Todo comienza con la necesidad de poner un orden en el mundo real lleno de misterios y confusiones, para lo cual se construye una realidad virtual o mundo de las ideas, iluminado por el entendimiento y la razón. Un mundo donde los números, las figuras geométricas, la lógica y el razonamiento abstracto juegan un papel primordial.

Este mundo ideal, al cual se tiene acceso a través del conocimiento y el razonamiento puro estaría por encima del mundo en que vivimos. Para Platón, el mundo real es una copia pálida y deforme de ese mundo perfecto de ideas.
Ese mundo de ideas se cosntruye a partir de conceptos muy simples que tienen su asidero en la mente de los hombres.

1.2. Números

El primer paso hacia la construcción de un mundo ideal viene dado por el concepto de número.

1.3. Razones y Proporciones

Después de haber creado el concepto de número natural, los matemáticos griegos se dedicaron a estudiar las fracciones. Para ello no fue necesario dividir la unidad o el uno en partes iguales, como se hace hoy en día. Más bien, idearon una forma alternativa acorde con sus creencias religiosas, estableciendo una comparación entre pares de números.

Una **Razón**, en griego Logos ($\lambda \acute{o} \gamma o \xi$), entre dos cantidades o números a y b, es simplemente una relación entre ellos. Esta se denota por el simbolismo $a : b$, y se lee .ª es a b".

Por ejemplo, si tenemos dos segmentos A y B, de longitudes 4 y 3, respectivamente, entonces se dice que la razón entre ellos es 4:3. Más adelante los pitagóricos cambiaron el simbolismo $a : b$ por el de fracción $\frac{a}{b}$.

Para calcular el valor numérico de una fracción, los griegos usaron un algoritmo, llamado Algoritmo de Euclides, que aparece en el libro de *Los Elementos*. La idea principal de este algoritmo, consiste en buscar una medida común para los segmentos A y B.

En términos de la geometría, la razón 4:3 sirve para indicar un par de segmentos A y B con una medida común. Es posible construir con regla y compás un pequeño segmento D (En este caso de longitud 1), que cabe cuatro veces en A y tres veces en B.

En el campo de la música las fracciones tienen aplicaciones sorprendentes. Se sabe que Pitágoras realizó unos experimentos para asignar razones a los sonidos de las notas musicales. Si se tiene una cuerda tensada de longitud L con una serie de trastes entre los extremos (Pensemos en una guitarra), al pulsar la cuerda cambiando la posición del dedo sobre los trastes escucharemos sonidos diferentes. Cuando se pisa la cuerda en la mitad se obtiene el mismo sonido pero una octava más arriba. Es la nota Do, cuya razón es 1 : 2. Si ahora pisamos el traste correspondiente a 2 / 3 de la cuerda se escucha la nota Sol, o la quinta, cuya razón es 2:3. Continuando de esta manera se pueden producir las siete notas musicales de la **Escala Pitagórica**, las cuales son: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La y Si.

La comparación entre varias razones nos conduce al concepto de **Proporción**, en griego $\grave{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\alpha$. Una proporción entre dos razones A:B y C:D se expresa como " A es a B, como C es a D" y se simboliza por A:B :: C:D.

Los términos A y D se llaman extremos, mientras que C y D se llaman términos medios.

Figura 1.1: Pitagoras

En el lenguaje matemático moderno, una proporción no es más que una igualdad entre fracciones. Por ejemplo, la proporción 2:3 :: 8:12 es equivalente a la igualdad

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

El estudio de proporciones en donde intervienen sólo tres términos, llevó a muchos descubrimientos interesantes. Dentro de éstas están las llamadas **Medias Proporcionales** que vienen dadas por

- Media Aritmética (B-A):(C-B) :: A:A.
- Media Geométrica A:B :: B:C.
- Media Armónica (B-A):(C-B) :: A:C.

1.4. La Proporción Áurea

Los matemáticos griegos se dedicaron a estudiar las propiedades de aquellas proporciones en donde sólo intervienen tres términos y el término central es común. Es decir, aquellas del tipo

$$a : b :: b : c \tag{1.1}$$

llamadas **Proporciones Contínuas**. El nombre proviene de la igualdad de los términos medios, lo cual hace que una razón se continúe con la siguiente. Según expresa Platón en el Timeo, para combinar bien dos términos se necesita uno en el medio de ellos.

Una manera de simplificar aún más la proporción dada en 1.1, es considerando al extremo c como la suma de los términos anteriores, esto nos da

$$a : b :: b : a + b \tag{1.2}$$

Si a y b son las longitudes de dos segmentos consecutivo A y B, entonces la proporción 1.2 nos dice que " la longitud del menor es al mayor, como éste a la suma de ambos. "

Podemos invertir los términos en 1.2 para obtener la porporción alternativa

$$(a + b) : b :: b : a \tag{1.3}$$

Cualquiera de las proporciones 1.1 o 1.2, es llamada **Proporción Áurea** o División en razones extrema y media. La escuela de Platón, la llamó simplemente la Sección. Posteriormente, durante la época del Renacimiento Italiano, el matemático Luca Paccioli la llamó **Divina Proporción**.

Calculemos ahora el valor de la fracción $\frac{b}{a}$.

De la proporción 1.3 se obtiene la ecuación

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$$

o sea

$$\frac{1}{\frac{b}{a}} + 1 = \frac{b}{a}$$

Haciendo $x = \frac{b}{a}$, obtenemos

$$\frac{1}{x} + 1 = x$$

o bien

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática nos queda la solución positiva

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Este número irracional, cuyo valor aproximado es 1.618.. se conoce como el **Número Áureo** y lo designamos por la letra griega ϕ. Por lo tanto

$$\phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.661803398875...$$

La razón b:a , cuyo valor es igual a ϕ se llama **Proporción Áurea**

El Número Áureo posee una serie de propiedades interesantes, que lo hacen especial. Entre ellas señalamos las más importantes:

1. $\phi^2 = 1 + \phi$
2. $\dfrac{1}{\phi} = \phi - 1 \approx 0{,}1618...$
3. $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$
4. $\phi = \dfrac{1}{\phi - 1}$

CAPÍTULO 2

EL NÚMERO DE ORO

2.1. Introducción

2.2. Construcciones con regla y compás

En número áureo no se pude escribir como una fracción de números enteros, por tal motivo se dice que es un **Número Iracional**. Sin embargo se puede construir geométricamente con la ayuda de la regla y el compás un segmento de longitud ϕ.

Veamos como es el procedimiento

1. Trazamos un segmento AB de longitud 1.
2. Sobre el mismo, se coloca un rectángulo de lados 1 y 2.
3. La diagonal del rectángulo tiene longitud $\sqrt{5}$, de acuerdo al Teorema de Pitágoras.
4. Con el compás, llevamos esta diagonal sobre la recta horizontal donde se halla B.
5. Esto nos dará el punto D.
6. A partir de D prolongamos el segmento una unidad hacia la derecha, hasta alcanzar el punto E.
7. Luego tomamos la bisectriz del segmento AE, y esto nos da el punto M.

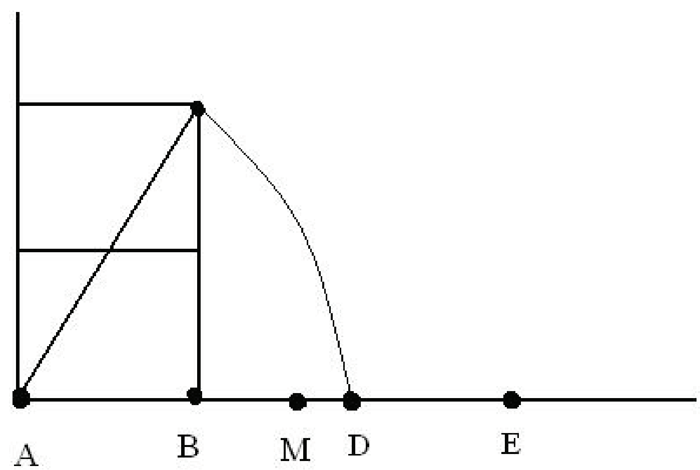

Figura 2.1: Construcción de un segmento áureo

8. El segmento AM tiene longitud $(1+\sqrt{5})/2$.

Cómo dividir un segmento AC en media proporcional?
Supóngase que se tiene una segmento AC y se quiere dividir en dos partes AB y BC de longitudes a y b, que satisfagan la proporción dorada

$$(a+b) : b :: b : a$$

o bien

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$$

La división de dicho segmento sigue los pasos dados a continuación:

1. Dibujar AC sobre una recta
2. Sobre el extremo C se levanta un segmento perpendicular de longitud AC/2, hasta alcanzar el punto E en el extremo opuesto.
3. Se unen los puntos AE para formar la hipotenusa h de un triángulo recto.
4. A partir de E se copia la distancia EC sobre sobre h, con la ayuda del compás. El punto de corte lo designamos por H.

5. El segmento AH, se copia ahora sobre la recta AC, para tener el punto B.

6. B es el punto de división del segmento en la razón áurea.

Ver la figura

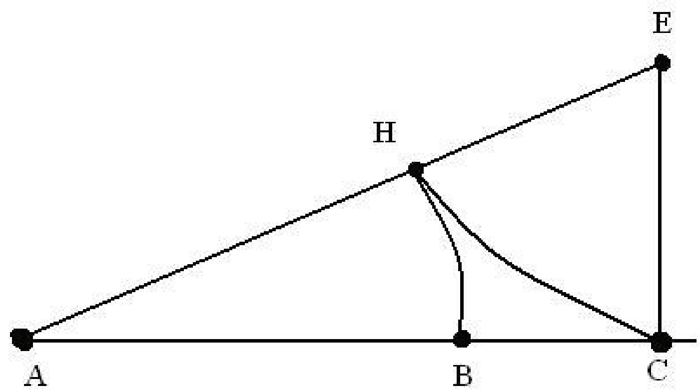

Figura 2.2: División de un segmento en razón áurea

Para verificar la afirmación anterior, se tiene que

$$AE = \sqrt{(AC)^2 + (\frac{AC}{2})^2} = \frac{AC}{2}\sqrt{5}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} AH &= AB \\ &= \frac{AC}{2}\sqrt{5} - \frac{AC}{2} \\ &= \frac{AC}{2}(\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{AC}{AB} &= \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \phi \end{aligned}$$

2.3. El Pentágono

Los polígonos son figuras geométricas formadas por segmentos de rectas llamados **Lados** , que se unen en puntos lamados **Vértices**, y que encierran un área. Un polígono se llama **Polígono regular de n lados** si todos los lados son de la misma longitud y además el ángulo formado entre los lados es constante.

El Pentágono es un polígono regular de 5 lados. El pentágono posee simetría rotatoria de orden 5. Es decir, cuando se hace rotar alrededor del centro un ángulo de $360^0/5 = 72^0$, se conserva la forma de la figura.

Para construir un pentágono como lo hacían los pitagóricos, debemos usar solamente regla y compás. Esta restricción puede parecer algo arbitraria al lector, pero, además de ganar precisión y exactitud, nos permitirá descubrir propiedades matemáticas interesantes. Estos métodos de construcción eran uno de los grandes secretos de la Hermandad de Pitágoras, pues tanto el pentágono como la estrella de cinco puntas o pentagrama tenían un carácter sagrado para ellos.

Muchas formas en la naturaleza poseen simetría pentagonal, como las flores, los frutos, las semillas, las estrellas de mar y algunos animales microscópicos. La relación entre el pentágono y los seres vivientes es algo evidente. Cuando se establezca la relación entre el pentágono y el número áureo, veremos la conexión profunda que hay entre ϕ y la naturaleza viviente.

Para construir un pentágono inscrito en un círculo de radio R, se procede de la manera siguiente:

1. Se traza el diámetro AC.

2. Se determina el punto B, mediatriz del segmento OA.

3. Trazamos ahora el segmento BP, cuya longitud es igual a d.

4. Obtenemos un triángulo $\triangle BOD$, el cula es recto en O.

5. Con el compás centrado en B, trazamos una circunsferencia de radio d, que corta al diámetro AC en el punto S.

6. Ahora con el compás centrado en P, trazamos una circunsferencia de radio PS que corta al círculo inicial en los puntos E y F. Estos puntos serán vértices del pentágono.

7. Con la misma abertura de compás, trazamos los restantes vértices G y H.

Ver la figura

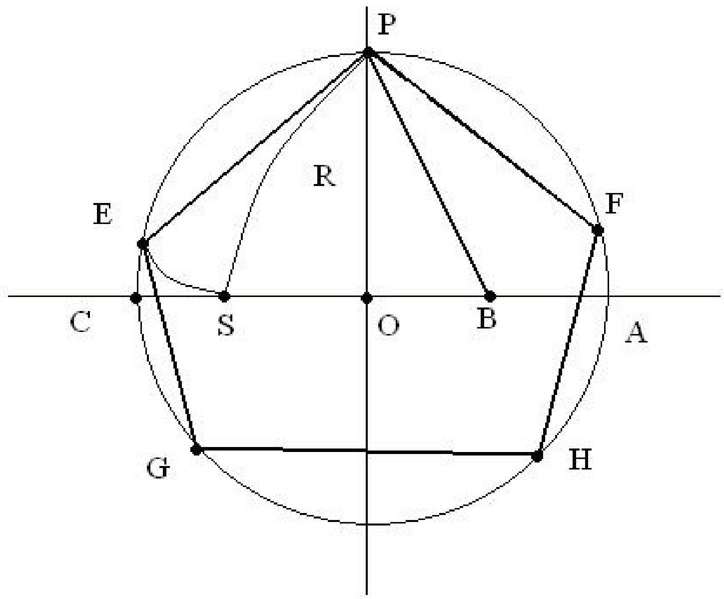

Figura 2.3: Construcción de un Pentágono regular

Vamos a calcular ahora, la longitud del lado de un pentágono en función del radio R. de la circunsferencia donde se inscribe. Esto será equivalente a calcular la longitud de PS en la figura anterior.

En primer lugar, hallamos el vaor de la hipotenusa d, mediante el Teorema de Pitagóras. Como $\triangle BOP$ es rectángulo se obtiene

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 + (R/2)^2 \\ &= R^2 \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Luego $d = \frac{R}{2}\sqrt{5}$.

Como $BP = BS = d$, y el triángulo $\triangle SOP$ es rectángulo, podemos aplicar nuevamente el Teorema de Pitágoras para calcular PS. Esto nos produce

$$\begin{aligned}
(PS)^2 &= R^2 + (SO)^2 \\
&= R^2 + \left(\frac{R}{2}\sqrt{5} - \frac{R}{2}\right)^2 \\
&= R^2 + \left(\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right)^2 \\
&= R^2 + \frac{R^2}{4}\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) \\
&= R^2\left(1 + \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
&= R^2\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{R}{2}\right)^2\left(10 - 2\sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

de donde concluimos que el lado del pentágono viene dado por

$$l = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

La presencia del número iracional $\sqrt{5}$ en esta fórmula nos indica la conexión que existe entre el pentágono y el número áureo. Podemos hacer algunas trasnformaciones en la expresión de arriba, para obtener una relación directa entre el lado del pentágono y ϕ. Más precisamente:

$$l = \frac{R}{2}\sqrt{3 - \phi},$$

siendo el valor de este número, cuando R = 1,

$$l \approx 1{,}175570...$$

.

La Escuela Pitagórica estudió las propiedades matemáticas y exotéricas de la estrella de cinco puntas o **Pentagrama**. Esta figura de diez lados se construye uniendo las diagonales del pentágono, como se muestra en el dibujo.

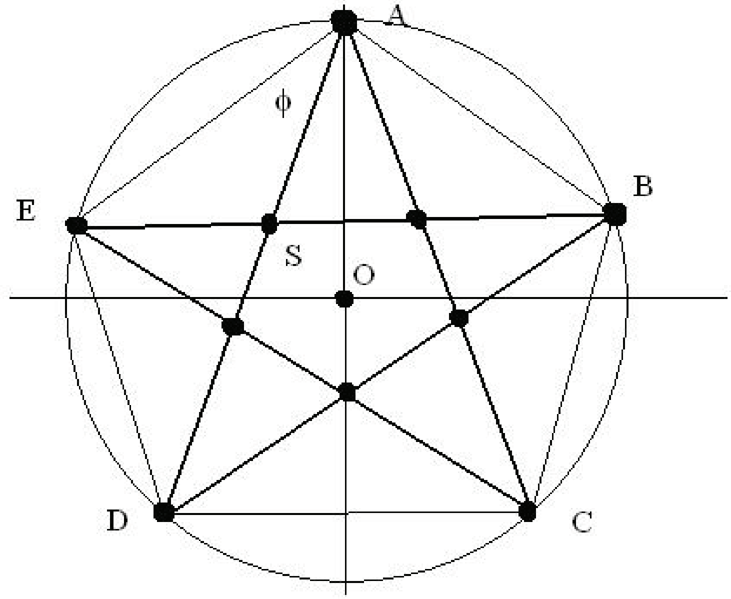

Figura 2.4: Construcción del Pentagrama

La estrella posee diez lados iguales, todos ellos de longitud l = AS. Veremos a continuación la relación que existe entre el valor de l y la la longitud de cualquier diagonal d = AD.
En primer lugar, ϕ el ángulo entre uno de los lados del pentágono EA y l. Es fácil ver que el valor del mismo es de 36^0. La razón obedece a un teorema de la geometría clásica, descubierto por Tales de Mileto.

Teorema 2.3.1. *La medida de un ángulo inscrito en el círculo es igual a la mitad del ángulo central que intrecepta el mismo arco.*

La demostración del mismo se deja como ejercicio para el lector.

En el caso que nos ocupa, el arco interceptado por ϕ es igual a $\widehat{ED}$. Nótese que la cuerda ED es uno de los lados del pentágono y por lo tanto, la medida del arco es igual al ángulo interno $\angle EOD$ que mide 72^0. Aplicando el teorema, concluimos que el ángulo ϕ es la mitad del ángulo interno y por lo tanto, su medida es de $72^0/2 = 36^0$

Probaremos ahora que los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle AES$ son semejantes.

Sabemos que dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos iguales. En primer lugar, el ángulo $\angle AED$ sustenta el mismo arco que $3x72^0 = 216^0$. Entonces por el teorema se concluye que $\angle AED = 108^0$.

Por otro lado, $\angle ESA = 180^0 - 72^0 = 108^0$. Por lo tanto se tiene que los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle AES$ son semejantes. Al ser tiángulos semejantes, sus lados son proporcionales y por lo tanto:

$$\frac{AS}{AE} = \frac{AE}{AD}$$

pero

$$AE = AD - AS$$

Luego se tiene la relación de proporción contínua entre d y l

$$\frac{d}{d-l} = \frac{d-l}{d}$$

si hacemos $d - l = t$ se tendrá

$$\frac{l}{t} = \frac{t}{l+t}$$

lo cual es una proporción áurea. Por lo tanto

$$\frac{l}{t} = \phi$$

Enunciamos este último resultado como:

Los lados del pentagrama dividen a las diagonales del pentágono en una proporción áurea.

CAPÍTULO 3

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

3.1. Fracciones Contínuas

Las fracciones del tipo $\dfrac{1}{n}$ constituyen el punto de partida para generar todos los números racionales. Este tipo de fracciones con numerador igual a la unidad, se llaman **Fracciones propias**. En la antiguedad una fracción como $\frac{5}{3}$ se expresaba mejor como 5 veces la fracción $\frac{1}{3}$.

Otra forma de abordar este problema es mediante las **Fracciones Contínuas**, un método que permite reducir cualquier fracción compuesta a una fracción en donde sólo intervienen números enteros y fracciones propias. Para ilustrar este método damos a continuación un par de ejemplos sencillos

Ejemplo 3.1.1.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3} &= 1+\frac{2}{3}\\
&= 1+\frac{1}{\frac{3}{2}}\\
&= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.2.

$$
\begin{aligned}
\frac{17}{10} &= 1+\frac{7}{10} \\
&= 1+\frac{1}{\frac{10}{7}} \\
&= 1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{3}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}
\end{aligned}
$$

Las fracciones contínuas son uno de los temas más antiguos de la matemática. Su origen se remonta a Grecia , específicamennte a Euclides, quien estudió este tipo particular de fracciones en el libro 8 de *Los Elementos*. Durante el renacimiento italiano, este tema fue retomado por Bombelli en su libro *L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica*, editado en Bolonia en 1572. Posteriormente, el matemático suizo Leonhard Euler, establece los primeros pasos rigurosos de esta teoría en su memoria *De fractionibus continuis* de 1737. Otro célebre matemático que se interesó por el tema fue Joseph Louis Lagrange, quien en 1768 formalizó la teoría como se conoce actualmente en su obra *Solution d'un problème d'arithmétique*.

Inspirado en los ejemplos de fracciones dados arriba, tenemos la siguiente definición

Definición 3.1.1. *Sea $n_1, n_2, \cdots$, una sucesión infinita de números enteros positivos, entonces la expresión*

$$
x = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \cdots}}}
$$

se llama Fracción Contínua asociada a x .
Usamos la notación

$$
x = \langle n_1, n_2, n_3, \cdots \rangle
$$

De acuerdo a la notación introducida, se tendrá que

$$
\frac{5}{3} = \langle 1, 1, 2 \rangle, \quad \frac{17}{10} = \langle 1, 1, 2, 3 \rangle
$$

Hallemos ahora la expansión del número áureo como una fracción contínua.

$$\begin{aligned}
\phi &= 1+\frac{1}{\phi} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\phi}} \\
&= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}}}
\end{aligned}$$

Podemos continuar con este proceso infinitamente para llegar a la conclusión

$$\phi = \langle 1, 1, 1, 1, \cdots \rangle$$

La importancia y el carácter especial del número áureo dentro de la matemática se manifiesta en la forma tan simple como se expresa mediante una fracción contínua, en donde sólo interviene la unidad. Esta es una razón de fondo para apreciar su valor de joya aritmética por su gran belleza y simplicidad.

3.2. La Serie Dorada

El número de oro ϕ genera una progresión geométrica, llamada **Serie Dorada**, dada por

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \ldots$$

en donde cada término es igual al anterior multiplicado por el factor ϕ.
La serie correspondiente de las aproximaciones a estos números irracionales sería

1	ϕ	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6
1	1.6180	2.6180	4.2360	6.8541	11.0901	17.9442

Esta serie de números posee propiedades interesantes que vale la pena resaltar. En primer lugar es una sucesión creciente , pues cada término es mayor que el anterior. Además los términos se van haciendo cada vez grandes, por lo cual se dice que la sucesión tiende a infinito.

En La serie cada dos términos consecutivos están en proporción áurea. Es decir

$$\phi^{n+1} : \phi^n :: \phi : 1$$

Otro hecho notable de esta sucesión de números irracionales es el patrón de formación aditivo

$$\begin{array}{rcl}
\phi^0 & = 1 & \\
\phi & = & \phi \\
\phi^2 & = & \phi + 1 \\
\phi^3 & = & \phi^2 + \phi \\
\phi^4 & = & \phi^3 + \phi^2 \\
\phi^5 & = & \phi^4 + \phi^3 \\
\phi^6 & = & \phi^5 + \phi^4 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Si analizamos este comportamiento desde la pespectiva geométrica, entonces la serie corresponde a las longitudes de segmentos de recta, que van en aumento. Iniciamos con la Unidad, después seguimos con el segmento áureo, luego con un segmento que es la suma de ambos, y así sucesivamente. Cada segmento es igual al anterior más otro término llamado el **Gnomon** (el término que antecede al anterior). En la práctica es un procedimiento increiblemente fácil y sencillo, un nuevo segmento se cosntruye sumando los anteriores.

3.3. Una sucesión misteriosa

Las potencias del número áureo generan una sucesión de números muy interesante, llamada Serie Dorada, como ya se ha visto. Analizaremos en esta sección un nuevo aspecto, que nos llevará al reino de los números naturales. Calculemos las seis primeras de ellas y notemos el patrón de formación que hay detrás de este proceso. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\phi^0 &= 1 \\
\phi &= \phi \\
\phi^2 &= \phi + 1 \\
\phi^3 &= \phi^2 + \phi = 2\phi + 1 \\
\phi^4 &= \phi^3 + \phi^2 = 3\phi + 2 \\
\phi^5 &= \phi^4 + \phi^3 = 5\phi + 3 \\
\phi^6 &= \phi^5 + \phi^4 = 8\phi + 5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Podríamos continuar este proceso por más tiempo. Si el lector quiere hacerlo, calcule unos diez términos más. Podemos llenar páginas tras páginas continuando con esta danza interminable de cifras, hasta el infinito. Pero con esta pequeña muestra ya se observa claramente algo atrayente para la mente de un matemático. Hay una sucesión de números enteros enfrente de ϕ , algo misteriosa que crece de forma decidida, recurrente e inquietante. Algo semejante al crecimiento de las plantas o de los animales. Esta sucesión, que será denotada por $f(n)$ temporalemente, se expresa mediante

$$1, 1, 2, , 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 277$$

Para construir esta sucesión, $f(n)$, hemos usado la **Fórmula Recursiva**

$$f(0) = f(1) = 1, \quad f(n) = f(n-1) + f(n-2), \quad , con\ n = 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

En la sección siguiente hablaremos sobre la historia y las múltiples aplicaciones de esta sucesión. Por los momentos el lector debe conformarse con saber que se trata de algo fundamental en nuestra teoría y que merece ser estudiada a fondo, conocer sus propiedades matemáticas y su relación con el número aúreo para desarrollar todo su potencial.

Con esta notación introducida, podemos dar una relación entre el número de oro y la sucesión $f(n)$

$$\phi^n = f(n)\phi + f(n-1) \tag{3.2}$$

La sucesión de potencias del número áureo depende solamente de la relación $\phi^2 = \phi + 1$. Es decir, ϕ es una solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Recordemos que dicha ecuación posee dos soluciones

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

El segundo valor es el **conjugado** del número áureo, el cual es desechado en algunas ocasiones por ser un valor negativo. Sin embargo es de utilidad en la obtención de nuevas fórmulas y relaciones. Por ejemplo

$$\phi + \bar{\phi} = 1$$
$$\phi - \bar{\phi} = \sqrt{5}$$

Las potencias de $\bar{\phi}$ generan también la sucesión $f(n)$. El proceso de construcción sigue los mismos pasos que se han desarrollado para ϕ. Tendremos entonces una fórmula para $\bar{\phi}$ equivalente a 3.2.

$$(\bar{\phi})^n = f(n)(\bar{\phi}) + f(n-1) \tag{3.3}$$

Combinando las ecuaciones 3.2 y 3.3 obtenemos

$$\phi^n - (\bar{\phi})^n = f(n)\sqrt{5}$$

de donde

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi^n - (\bar{\phi})^n\right) \tag{3.4}$$

Esta última fórmula nos permite obtener una expresión para el término general de la sucesión $f(n)$ en función del número de oro. Es una relación muy valiosa para el estudio de esta serie, cuyos frutos y alcances podrán ser apreciados en la próxima sección. La relación fundamental es

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3.5}$$

3.4. Un problema de conejos

En 1202 el matemático italiano Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci (una contracción de filius Bonacci) publicó un libro llamado *Liber Abacci* en donde plantea un problema sobre el crecimiento de una población de conejos. Fibonacci fue uno de los grandes impulsores del sistema de numeración decimal en Europa. Fue un comerciante que viajó por todo el Mar Mediterráneo y entró en contacto con matemáticos de otras culturas, de quienes aprendió gran cantidad de métodos y algoritmos para realizar las operaciones de la aritmética.

El problema de los conejos es el siguiente.

Problema

Una pareja de conejos es colocada en un criadero al comienzo del año. Cada mes, la hembra procrea una nueva pareja de sexos opuestos. Al comienzo del segundo mes de haber nacido, cada nueva pareja procrea otra pareja de conejos. Halle el número de parejas en el criadero, después de un año.

En el primer mes, la pareja inicial de conejos dará origen a otra pareja, y por lo tanto habrá dos parejas de conejos. En el segundo mes la pareja inicial procreará otra nueva pareja, y por lo tanto tendremos 3 parejas en el criadero. En el tercer mes tanto la pareja inicial, como la primera pareja que tuvieron crearán nuevas parejas, con lo cual al final del mes habrá $3 + 2 = 5$ parejas de conejos.

Sea a_n la población de parejas en el mes n. De acuerdo a lo establecido en el párrafo anterior, esta poblacióón es igual a la del mes anterior, más las nuevas parejas procreadas, que es igual a la cantidad de parejas existentes dos meses atrás. Por lo tanto se tiene una relación de recurrencia

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad para \quad n \geq 2 \tag{3.6}$$

Por lo tanto la población de parejas en cada mes es igual

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89{,}144, 233, 277....$$

llamada **Sucesión de Fibonacci**.

¿Existe una fórmula explicita para calcular el valor de a_n, que dependa sólo de n ?. Vemos entonces que la solución a esta ecuación la hemos obtenido en la sección anterior 3.5. Hemos demostrado que la sucesión de Fibonacci es igual a la sucesión $f(n)$. Se establece entonces una conexión maravillosa entre un patrón de crecimiento de poblaciones y el número de oro. Esto es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3.7}$$

Es interesante estudiar la sucesión de fracciones construida con los términos a_n, esto es la serie

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \ldots \tag{3.8}$$

Colocaremos en la siguiente tabla los valores aproximados de los primeros 12 términos

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/43	89/55	144/89	233/144
1	2	1.5	1.6666	1.60	1.625	1.615	1.619	1.617	1.61818	1.6179	1.61805

Los valores de esta serie se aproximan cada vez más al número áureo. Podemos concluir de manera informal, entonces, que el límite de la fración a_n/a_{n-1} cuando n tiende a infinito es igual a ϕ. Para la demsotración rigurosa de este hecho nos basaremos en las propiedades de los límites.

En primer lugar, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\phi^n - (\bar{\phi})^n}{\phi^{n-1} - (\bar{\phi})^{n-1}} \\ &= \frac{\phi - \bar{\phi}\alpha}{1-\alpha} \end{aligned}$$

donde $\alpha = (\bar{\phi}/\phi)$ es aproximadamente 0.381. Por lo tanto el límite

$$\lim_{x\to\infty} \alpha = 0$$

De este resultado se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \phi \tag{3.9}$$

CAPÍTULO 4

LA ESPIRAL MARAVILLOSA

4.1. Introducción

La espiral es una curva del plano trazada por un punto que se desplaza a velocidad constante, que gira de manera uniforme sobre un punto situado ella (Polo). Estos dos tipos de movimientos, rectilíneo y circular al combinarse producen una curva que crece desde el centro o Polo hacaia el exterior, creando una sensación de movimiento perpetuo.

La espiral más sencilla es la llamada **Espiral de Arquímedes**, una curva infinita cuyos brazos presentan un crecimiento lineal. Es decir, la distancia entre los arcos consecutivos de la espiral se mantiene constante. Ver la figura

El centro de la espiral o el Polo, se denota generalmente como el 0, que coincide con el centro de un sistema de coordenadas cartesianas. El radio es un segmento de recta, denotado por R, que tiene un extremo en O y otro en el punto P y cuyo movimiendo circular va generando la curva. El áangulo de giro se denota por la letra griega θ. Generalmente los ángulos se miden positivamente en el sentido contrario a las agujas del reloj y se expresan en unidades de radianes o grados. En estas condiciones la ecuación de la Espiral Arquimedeana se expresa

$$R = A + B\theta \tag{4.1}$$

donde A y B son un par de constantes. La constante B se llama factor de crecimiento. El punto de inicio de la curva es A.

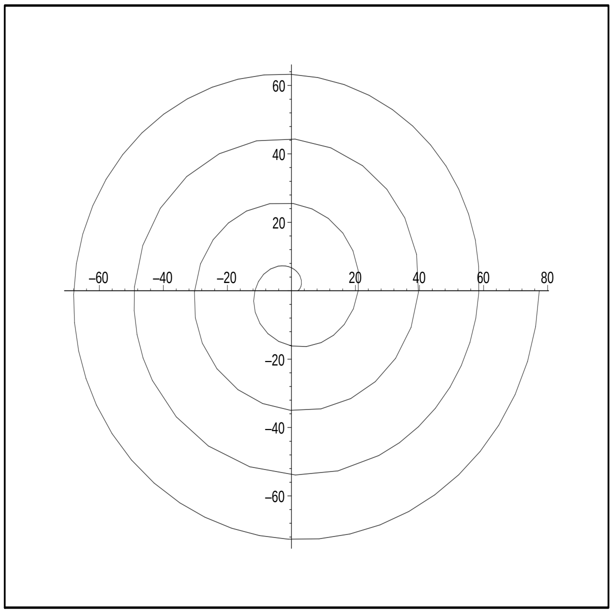

Figura 4.1: La espiral de Arquímedes

Si en la ecuación anterior hacemos $B = \frac{k}{2\pi}$ entonces en cada vuelta completa la espiral se aleja k unidades del centro. La distancia entre los arcos consecutivos de la espiral es igual a k.

Más interesante aún que dicha curva, es la **Espiral Logaritmica**, en la cual el factor de crecimiento no es constante, sino que aumenta a medida que el ángulo θ crece. La ecuación que describe el movimiento de ella es

$$R = ae^{b\theta} \tag{4.2}$$

siendo e el **Número de Euler**, la base de los logaritmos naturales o neperianos , cuyo valor aproximado es

$$\mathrm{e} \approx 2.71828182846$$

En la ecuación b es el factor de crecimiento, mientras que a es el punto incial de donde parte la espiral. Si hacemos $b = \frac{k}{2\pi}$ entonces en la primera vuelta la espiral se aleja ae^k del polo. A la segunda vuelta se aleja ae^{2k}, a la tercera ae^{3k} y así sucesivamente. Ver la figura.

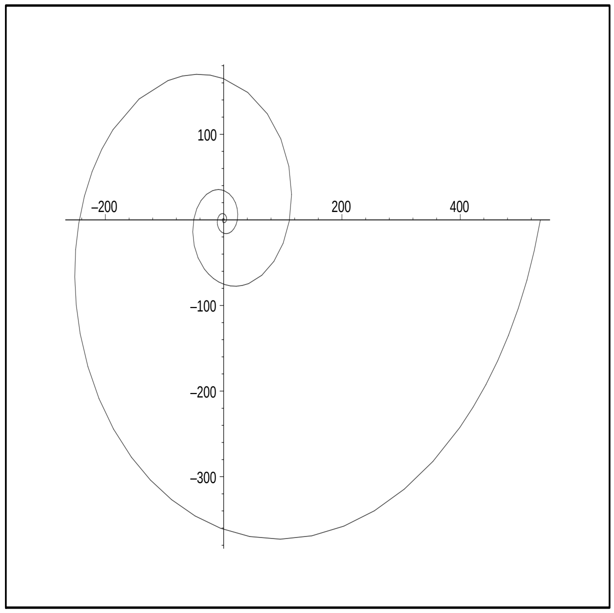

Figura 4.2: La espiral Logaritmica

4.2. La Espiral Áurea

Finalmente, veremos un tipo de espiral relacionada con el número áureo.

La **Espiral Áurea** es un tipo de espiral logaritmica cuya ecuación es

$$R = a\phi^{\frac{4\theta}{\pi}} \tag{4.3}$$

Como siempre a es el valor inicial de la espiral, y θ es el ángulo de giro. Cada cuarto de vuelta o giro de 90^0 la espiral crece en un factor ϕ. Ver la figura

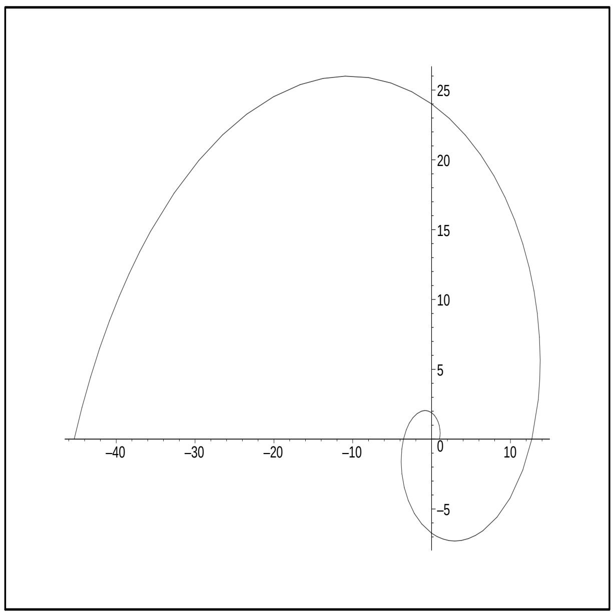

Figura 4.3: La espiral Áurea

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bravo Flores, Raúl. *Fundamentos de los sistemas numéricos,* Editorial Interamericana, México, 1971.

[2] W.W. Adams and L.J. Golstein. *Introduction to number theory*, Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1976.

[3] Carl, Boyer. *A History of Mathematics*. John Willey and Son, New York, 1968.

[4] David, Burton. *Introduction to Modern Abstract Algebra*, Addison Wesley,Reading,Mass, 1967.

[5] Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones . *The historical roots of elementary mathematics*, Dover, New York, 1976.

[6] Lindsay, Childs. *A concrete introduction to Higher Algebra*, Springer Verlag, New York. 1979.

[7] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*, New Haven and London, Yale University Press, 1966.

[8] Hall, Marshall. *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

[9] Herstein, I. N. *Topics in Algebra*, John Wiley and son, New York, 1975

[10] Ireland, K. and M. Rosen. *A classical introduction to modern number theory*, Springer Verlag, New York, 1982.

[11] Itard, J. *Joseph Louis Lagrange*, Dictionary of Scientific Biography.

[12] Itard, J. *Adrien Marie legendre*, Dictionary of Scientific Biography.

[13] Lang, S. *Algebra* , Adison-Wesley,Readin, Mass, 1965.

[14] K. O. May. *C. F. Gauss* , Dictionary of Scientific Biography.

[15] I. Niven, H.S: Zuckerman. *Introduction to number theory*, Wiley, New York, 1966.

[16] Winfried Scharlau, Hans Opolka *FRom Fermat to Minkowsky* , Springer Verlag, New York, 1985.

[17] D. E. Smith. *History of Mathematics* , Dover , New York, 1958.

[18] A. Youschkevitgh. *Leonhard Euler* , Dictionary of Scientific Biography.

[19] Stillwell John.*Mathematics and its history,* Springer-Verlag, New York, 1989.

[20] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable,* Springer-Verlag, New York, 1978.

[21] Rivero, Francisco. *Números Complejos*Escuela Venezolana de Enseñanza de Matemática. Mérida, Venezuela. 2005.

[22] Fefferman, Charles. *An easy proof of the Fundamental Theorem of Algebra* The Am. Math. Monthly vol. 74, p.854-855, 1967.