
PROBLEMAS DE APLICACIONES DE LA MATEMATICA

FRANCISCO RIVERO MENDOZA PHD.

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de los Andes

Mérida - Venezuela

Contenido

1	Números Complejos	1
1.1	Propiedades Generales	2
1.2	Producto de números complejos	5
1.3	Forma Polar de los números complejos.	10
2	Factorización de Polinomios	21
2.1	Introducción.	21
2.2	Definiciones Básicas.	22
2.3	Raíces de Polinomios	27
2.4	El Método de Ruffini	34
3	Problemas de Aplicaciones	53
3.1	Como resolver un Problema	53
3.2	Problemas de Economía	54
4	Matrices	73
4.1	Operaciones con matrices	74
4.2	Inversa de una matriz.	83
4.3	Método de Gauss para calcular la inversa de una matriz	86
4.4	Sistemas de Ecuaciones	92

Problemas de Ciencia

En este capítulo veremos como resolver problemas de otras areas distintas a la economía, como la Geometría, la Física, la Química, la Astronomía,...etc. Dentro de cada problema damos las herramientas teóricas necesarias para la resolución de los mismos.

1.1 Problemas generales

Para resolver estos problemas se requieren algunos conocimientos mínimos de geometría y álgebra.

1.Area de un rectángulo. Un rectángulo tiene una altura de 3 veces la longitud de la base. Si se incrementan la base en 3 cm. y la altura en 5 cm. entonces el área es de 319 cm. ¿ cuales son las dimensiones del rectángulo ?

Solución. Sea X la longitud de la base. Luego la altura será 3X. Al incrementar los lados se tiene un área de

$$(X + 3)(3X + 5) = 319$$

Efectuando operaciones nos queda

$$3X^2 + 5X + 9X + 15 = 319$$

$$3X^2 + 14X - 304 = 0$$

Resolviendo en X obtenemos

$$X = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 + 4(304)(3)}}{6} = \frac{-14 \pm 62}{6}$$

Desechamos la solución negativa, por tratarse de una medida de longitud, y por lo tanto la solución es $X = 8$.

Luego el rectángulo tiene longitud de la base igual a 8 y altura 24.

2. Cercado de una cancha de fútbol. Una cancha de fútbol de 25 metros de ancho por 76 de largo se va a cercar dejando un espacio o corredor entre la cerca y el borde del área de juego. El costo de la cerca es de Bs. 4.000 por metro lineal. Si se dispone de Bs. 968.000 para cercar la cancha, entonces calcular el ancho del corredor.

Solución Sea X el ancho del corredor. Entonces el perímetro del rectángulo a cercar es

$$P = 2(76 + 2X) + 2(25 + 2X)$$

El costo total de la cerca es igual a este perímetro por el costo de cada metro de cerca. Luego se tiene la relación de costo

$$400 \cdot ((76 + 2X) + 2(25 + 2X)) = 968.000$$

$$(76 + 2X) + (25 + 2X) = 121$$

de donde

$$4X = 20$$

luego $X = 5$. Por lo tanto el ancho del corredor debe ser de 5 metros.

3. Calculo de Edades. Parmeno es 5 años mayor que Sempronio. Hace diez años, la suma de las dos edades es igual a 35. ¿Cual es la edad actual de cada uno de ellos?

Solución. Sea X la edad actual de Sempronio. Entonces $X + 5$ es la edad actual de Parmeno. La suma de las dos edades hace 10 años fue

$$(X - 10) + (X - 5) = 35$$

de donde

$$2X = 50$$

o sea

$$X = 25$$

Luego la edad de Sempronio es 25 y la de Parmeno es 30.

4. Fabricación de Ron. Un fabricante de Ron desea producir 60.000 lt. de un Ron Especial con un grado alcoholico de 26 %. Si dispone de un Ron Añejo de 30 % de grado alcoholico y otro de 20.5 % ¿ Que cantidad de cada ron deberá mezclar para obtener la cantidad deseada del Ron Especial?

Solución. Sea X la cantidad del primer tipo de ron a usar en la mezcla. Luego 60.000 - X será la cantidad a usar del segundo ron. Luego la concentración de alcohol será

$$X \cdot \frac{30}{100} + (60.000 - X) \cdot \frac{20.5}{100} = 60.000 \cdot \frac{26}{100}$$

Después de multiplicar por 100 en todas partes, obtenemos

$$30X + 1320000 - 20.5X = 1560000$$

o sea

$$9.5X = 240.000$$

de donde se concluye que

$$X = 25263$$

Luego se deben mezclar 25263 litros del primer ron y 24737 litros del segundo

5. Diagonal de un rectángulo. Un terreno de forma rectangular tiene 20 metros de ancho por 60 de largo. Hallar la longitud de la diagonal.

Solución. Sea x la longitud de la diagonal. Por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$x^2 = (20)^2 + (60)^2$$

de donde

$$x = \sqrt{20^2 + 60^2} = 63.24$$

Por lo tanto la diagonal del terreno mide 63,24 metros de longitud.

6. Cuadrado inscrito Una circunsferencia contiene un cuadrado inscrito de lado igual a 3. Hallar el área de la circunsferencia.

Solución. Sea R el radio de la circunsferencia, el cual es igual a la mitad de la diagonal del cuadrado. Por lo tanto

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

El área de la circunsferencia es

$$A = \pi \cdot R^2 = \frac{9\pi}{2}$$

7. Número Natural. Un número elevado al cubo, menos el cuadrado del mismo mas el número es igual 105. Calcular dicho número.

Solución. Sea x el número. Entonces

$$x^3 - x^2 + x = 105$$

Por lo tanto se tiene una ecuación polinomial

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 105 = 0$$

Este polinomio se factoriza, mediante el método de Ruffini como

$$P(x) = (x - 5)(x^2 + 4x + 21)$$

Luego $x = 5$ es el número buscado.

8. Pintura de una puerta. Una puerta de 2.15 m de alto por 0.8 m de alto y 3 cm. de espesor se pintó con un barniz. Si el espesor de la capa de barniz es de 0.2 mm. ¿ Que volumen de pintura se utilizó ?

Solución. Sea S la superficie de la puerta. Entonces el volumen V de pintura usada es igual a

$$V = S \cdot 0.2mm.$$

$$V = 2 \{ (2.15)(0.8) + (2.15)(0.003) + (0.8)(0.03) \} 2 \cdot 10^{-4} m$$

$$V = 0.0007234 \text{ m}^3 \approx 0.72 \text{ lt}$$

Luego se emplearon aproximadamente 0.72 litros de barniz.

9. Costo de un balón. Un balón de 30 cm de diámetro está hecho de un plástico cuyo costo es Bs. 5.000 por m^3 . Si el grosor del balón es de 2.6 mm. ¿Cual es el costo del balón?

Solución. Sea C el costo del material en Bs. y S la superficie del balón. Entonces

$$C = 5.000 \cdot S \cdot \text{grosor}$$

$$C = 5.000 \text{ Bs/m}^3 \cdot 4\pi(0.15 \text{ m})^2 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

$$C = 3.67 \text{ Bs}.$$

10. Peso de una viga. Una viga de hierro de forma cilíndrica tiene un radio de 3 cm. y un largo de 12 m. Si la densidad del hierro es $\rho = 7.86 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ¿Cuanto pesa la viga ?

Solución. Sea V el volumen de la viga y P el peso en Kgs. Entonces

$$P = V \cdot \rho = \pi(0.015m)^2 \cdot (12 \text{ m})(7.86 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3)$$

$$P = 66.6 \text{ Kg}$$

Luego el peso de la viga es de 66.6 Kilogramos.

1.2 Problemas de Movimiento

En esta sección resolvemos algunos problemas de la física relacionados con el movimiento.

11. Velocidad promedio de un automóvil. Un automóvil recorrió 250 Km. a una velocidad promedio de 70 Km/h . Si los primeros 50 Km. los recorrió a 60

Km/h ¿ Que velocidad promedio debe desarrollar en el resto del trayecto?

Solución Sea v la velocidad promedio empleada en recorrer los 200 Km. faltantes. Entonces la velocidad promedio en todo el trayecto se expresa

$$\frac{50}{250} \cdot 60Km/h + \frac{200}{250}v = 70Km/h$$

Luego

$$\frac{200}{250}v = 70Km/h - 12Km/h = 58Km/h$$

de donde

$$v = \frac{250 \cdot 58Km/h}{200} = 72.5Km/h$$

Luego el automóvil debe desplazarse a una velocidad promedio de $72.5 Km/h$ durante el resto del trayecto.

12. Llenado de una piscina. Una piscina que tiene una capacidad de $450 m^3$ está completamente vacía y se comienza a llenar con agua por medio de dos válvulas. Se abrió la válvula A durante un tiempo, a una velocidad de 50 lts. por segundo y luego se cerró. Mas tarde se abrió la válvula B a una velocidad de 60. lts. por segundo, permaneciendo abierta el doble del tiempo que la primera hasta llenar la piscina. ¿ cuanto tiempo permaneció abierta cada válvula ?

Solución. Sea X el tiempo empleado por la válvula A en verter agua dentro de la piscina. Luego $2X$ será el tiempo empleado por la otra válvula. Entonces la capacidad de la piscina viene dada por

$$50lt/s \cdot X + 60lt/s \cdot 2X = 450.000lt.$$

$$200 \cdot Xlt/s = 450.000lt.$$

de donde

$$X = 2250s$$

Luego la válvula A estuvo abierta durante 2250 segundos = 37.5 minutos, mientras que la válvula B permaneció abierta por 75 minutos. **13. Punto de encuentro en**

la carretera. Un auto sale de una ciudad A hacia otra ciudad B, que se encuentra

a 250 Km. de A, desplazándose en línea recta y a una velocidad constante de 90 Km/h. Cinco minutos mas tarde, un segundo auto sale de B, desplazándose hacia A a una velocidad de 95 Km/h ¿ En que punto de la carretera se encuentran los dos vehículos ?

Solución. Sea X la distancia en Kms recorrida por el primer auto , desde A hasta el lugar de encuentro. El tiempo necesario, en horas, para recorrer X Kms. es

$$t_1 = \frac{X}{90}$$

Por otro lado, el tiempo en horas que tarda el segundo vehículo es

$$t_2 = \frac{250 - X}{95} + \frac{5}{60}$$

donde el primer sumando representa el tiempo en movimiento y 5/60 representa el tiempo que permaneció el auto parado.

Como ambos tiempos deben ser iguales, se tiene

$$\frac{X}{90} = \frac{250 - X}{95} + \frac{1}{12}$$

de donde

$$\begin{aligned} 1140X &= 90(3000 - 12X + 95), \\ 2220X &= 278550 \end{aligned}$$

con lo cual

$$X = \frac{278550}{2220} = 125.47 \text{ Km.}$$

Luego los dos autos se encuentran a 125.47 Km. de la ciudad A, en la dirección de B.

14. Distancia recorrida. Un auto viaja en línea recta, con una velocidad constante de 100 Km/h durante una hora y 25 minutos hasta detenerse por completo. Luego se regresa al lugar de partida a una velocidad de 70 Km/h y se detiene a descansar después de haber viajado durante una hora ¿ A que distancia se halla del punto de partida?

Solución. Sea d_1 la distancia desde el punto de partida hasta la llegada. Entonces este se calcula

$$d_1 = 100 \text{ Km/h} \cdot 1.4166 \text{ h} = 141.66 \text{ Km}$$

Sea d_2 la distancia recorrida al regresar. Luego

$$d_2 = 70 \text{ Km} \cdot 1 \text{ h} = 70 \text{ Km}.$$

Luego la distancia desde el punto de partida hasta el punto de descanso será la diferencia entre ambas distancias y por lo tanto

$$d = d_1 - d_2 = 141.66 \text{ Km} - 70 \text{ Km} = 71.66 \text{ Km}$$

15. Velocidad de caída. Una pelota se deja caer desde un edificio de 52 metros de altura ¿ Con que velocidad choca contra el piso? ¿ Cuanto tiempo tarda en caer?

Solución. La velocidad v de caída satisface la ecuación de movimiento

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad y h es la distancia recorrida por la pelota. Luego

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 52 \text{ m}}$$

$$v = 22.13 \text{ m}.$$

Para calcular el tiempo en caer al suelo usamos la relación

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

o sea

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 52 \text{ m}}{9.8 \text{ m/s}^2}}$$
$$t = 3.2 \text{ sg}.$$

Luego la pelota tarda 3.2 segundos en caer al suelo.

16. Caída con velocidad inicial. Si en el problema anterior la pelota se lanza hacia abajo con una velocidad de 20 m/s ¿ Con que velocidad choca contra el piso ? ¿ Cuanto tiempo tarda en caer ?

Solución. Tenemos en este caso que la velocidad v satisface

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h$$

de donde

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{(20m/sg)^2 + 2(9.8m/sg^2)(52m)}$$

$$v = 37.67 \text{ m/sg}$$

El tiempo en caer la pelota satisface la ecuación

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

de donde obtenemos una ecuación de segundo grado en t

$$1/2gt^2 + v_0t - h = 0$$

resolviendo esta ecuación para t nos da

$$\begin{aligned} t &= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4(h)(1/2g)}}{g} \\ &= \frac{-20m/sg + \sqrt{(20m/sg)^2 + 2(52m)(9.8m/sg^2)}}{9.8m/sg^2} \\ &= 1.8sg. \end{aligned}$$

Luego el tiempo de caída de la pelota es de 1.8 sg.

1.3 Problemas de Astronomía.

La Estronomía es una de las ramas mas emocionantes de las ciencias y también una de las mas antiguas. Podemos calcular la distancia entre los planetas y el sol, el diámetro, su masa,.. usando las Leyes de Gravitación Universal.

1. Fuerza de gravedad en el Planeta Marte. Calcular la fuerza de gravedad en el Planeta Marte sabiendo que su diámetro es 6.798 Km. y su masa es 0.107 la masa de la tierra.

Solución. Sea g la fuerza de gravedad en Marte. Entonces de acuerdo a la Ley de Gravitación Universal, la fuerza de gravedad viene dada por

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Newton} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$ es la constante de gravitación Universal, M es la masa del planeta y R su radio.

Recordemos además que

$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ Kg} \cdot \text{m} / \text{sg}^2.$$

$$\text{Masa de la Tierra} = 6 \cdot 10^{24} \text{Kg}.$$

Por lo tanto

$$g = \frac{6.67 \times 10^{-11} \text{Newton} \cdot \text{m}^2 \cdot 0.107 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6.798.000 \text{m} / 2)^2 \text{Kg}^2}$$

Después de cancelar algunas unidades y multiplicar potencias de 10 nos queda

$$g = \frac{6.67 \cdot 0.107 \cdot 6 \cdot 10^{13}}{(3.399)^2 \cdot 10^{12}} \text{m} / \text{sg}^2$$

Cancelando potencias de 10 produce

$$g = \frac{6.67 \cdot 0.107 \cdot 6}{(3.399)^2} \text{m} / \text{sg}^2 = 3.706 \text{m} / \text{sg}^2$$

Luego la fuerza de gravedad en el planeta Marte es $3.706 \text{ m} / \text{sg}^2$.

6. Calculando el peso de una persona en Marte. ¿Cuanto pesa una persona de 75 Kg. de peso en la tierra cuando esta sobre la superficie de Marte?

Solución. Sea P_M el peso de la persona en Marte. Entonces la ecuación de peso en Marte viene dada por

$$P_M = m \cdot g_M$$

donde g_M es la gravedad de Marte y m es la masa de la persona.

para calcular la masa de la persona, nos valemos de su peso sobre la tierra. Así pues, si P_T es su peso sobre la tierra y g_T es la gravedad de la tierra, se tiene

$$P_T = m \cdot g_T$$

de donde

$$m = \frac{P_T}{g_T}$$

Luego el peso en Marte viene dado por

$$P_M = \frac{P_T \cdot g_M}{g_T}$$

La gravedad sobre la tierra es

$$\text{Gravedad Terestre} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

por lo tanto

$$P_M = \frac{75 \text{ Kg} \cdot 3.706 \text{ m/s}^2}{9.8 \text{ m/s}^2} = 28.36 \text{ Kg}.$$

Por lo tanto la persona pesa 28.36 Kg. sobre el planeta Marte.

7. El Planeta Krapción En un planeta cuya fuerza de gravedad sea la décima parte que la de la tierra, una persona puede saltar varios metros de altura fácilmente e inclusive volar un poquito como Superman. ¿ Que radio debe tener un planeta con la misma masa de la tierra para que su fuerza de gravedad sea 10 veces menor que la de la tierra?

Solución. Sea g la gravedad de Krapción. Entonces

$$g = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{10} = 0.98 \text{ m/s}^2$$

Usamos la ley de gravitación Universal para hallar el radio del planeta. En efecto tenemos

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

de donde

$$R = \sqrt{\frac{M \cdot G}{g}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Newton} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}}{0.98 \text{ m/s}^2}}$$

Después de cancelar algunas unidades y hacer operaciones nos queda

$$R = \sqrt{40.836 \cdot 10^{13} \text{ m}} = 20208 \text{ Km}.$$

Luego el Planeta Krapción deberá tener un radio de 20208 Km. La relación entre el volumen de Krapción y el de la tierra es de 31.92. Luego Krapción es casi 32 veces mas grande que nuestro planeta y tiene la misma masa. De aquí se concluye que

hay muchos agujeros en Kraptón dentro de los cuales pudieron construirse ciudades maravillosas.

11. Velocidad de un satélite. Un satélite artificial recorre una órbita circular alrededor de la tierra situada a 500 Km. sobre el nivel del mar. ¿cual es la velocidad con que viaja el satélite ?

Solución. Sea V la velocidad con la cual viaja el satélite. entonces de la Ley de gravitación Universal se deduce la fórmula

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot M}{d}}$$

donde G es la constante de gravitación Universal, M es la masa de la Tierra y d la distancia desde el satélite hasta el centro de la tierra. Sabemos que el radio terrestre es de 6370 Km., con lo cual

$$d = 500Km. + 6370Km. = 11370Km.$$

Podemos calcular ahora la velocidad del satélite

$$V = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{Newton} \cdot m^2 / Kg^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} Kg}{11.370 \cdot 10^6 m}}$$

después de cancelar unidades se tiene

$$V = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 6}{11.370}} 10^7 m^2 / sg^2 = 18761 m / sg$$

Luego el satélite se desplaza a una velocidad de 18761 m/sg o bien 5211 Km/h .

12. Período de un satélite. Hallar el tiempo que le toma al satélite anterior dar una revolución completa alrededor de la Tierra.

Solución. Sea T el período del satélite, el cual es igual al tiempo que tarda en dar una vuelta completa a la tierra. Luego

$$T = \frac{2\pi R}{V}$$

donde V es la velocidad del satélite y R el radio de la órbita del satélite. Se tiene entonces

$$T = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 11.370.000m.}{18761m/sg}$$

$$T = 3807.889sg = 1.0577 \text{ hora}$$

Luego el satélite da una vuelta completa alrededor de la tierra cada 1.0577 hora.

1.4 Problemas de Fuerza y Presión

La fuerza que ejercen los cuerpos sobre su entorno es uno de los fenómenos físicos mas interesantes. La presión del aire sobre la superficie de la tierra y sus variaciones origina cambios en la composición de la atmósfera los cuales determinan el clima de una región.

25.Presión sobre la base de un tanque. Un tanque cilíndrico de radio 1.75 cm. esta lleno de agua hasta un nivel que se encuentra a 2 metros del fondo. Hallar la presión ejercida por el líquido sobre la base del tanque.

Solución. Sabemos que la presión es igual a la fuerza sobre unidad de área. Luego

$$P = \frac{F}{A}$$

Usaremos la unidad de presión denominada **Pascal**, la cual se simboliza por Pa. Esta se define

$$1Pa. = \frac{1 \text{ Newton}}{1 \text{ m}^2}$$

La fuerza ejercida por el agua es igual a la masa del agua multiplicada por la gravedad. Luego, si omitimos las unidades, se obtiene

$$P = \frac{V \cdot \rho \cdot 9.8}{S}$$

donde V es el volumen de agua, ρ es la densidad del agua y S la superficie de la base. Por lo tanto, si h es la altura del agua en el recipiente se tiene

$$P = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho \cdot 9.8}{\pi \cdot R^2} = h \cdot \rho \cdot 9.8$$

Tomando la densidad del agua como $1 \text{ Kg}/\text{m}^3$ y simplificando las unidades nos queda

$$P = 9.8 \cdot h \text{ Pa}$$

Obsérvese que la presión no depende del radio del cilindro. Finalmente, haciendo $h = 2$ nos queda

$$P = 2 \cdot 9.8 \text{ Pa} = 19.6 \text{ Pa}.$$

26. El barómetro. Hallar la presión ejercida por una columna de Mercurio de 76 cm. de alto, sabiendo que la densidad del mercurio es $\rho = 13.6 \cdot 10^3 \text{ Kg}/\text{m}^3$.

Solución. Usando la ecuación para la presión se tiene

$$\begin{aligned} P &= h \cdot \rho \cdot 9.8 \\ &= (0.76 \text{ m})(13.6 \cdot 10^3 \text{ Kg}/\text{m}^3)(9.8 \text{ m}/\text{sg}^2) \\ &= 101292 \text{ Pa} \\ &= 101.292 \text{ KPa}. \end{aligned}$$

Esta es la presión ejercida por el peso del aire sobre la superficie de la tierra. Por esta razón se llama **Atmósfera** y se abrevia atm.

$$1 \text{ atm} = 101.292 \text{ KPa}.$$

En el Barómetro se coloca el mercurio en una columna de vidrio, cerrada en la parte superior y la parte inferior se comunica con un pequeño plato lleno de mercurio. La columna tiene una escala de en mm. Entonces a nivel del mar, a 0°C ya 45° de latitud norte, la columna de mercurio marca 760 mm. Sin embargo, en Venezuela por encontrarse muy cerca del Ecuador, la presión normal de la atmósfera es de 761 mm. La presión atmosférica es producida por la capa de aire que cubre la tierra y que ejerce un peso debido a la gravedad. Esta varía con la altura, la temperatura y la humedad del aire. Así por ejemplo en la Ciudad de Mérida (1800 m.), la presión en la parte alta es 619 mm de mercurio, mientras que en el Pico Bolívar (5007 m.)

la presión es de 420.5 mm. de mercurio.

27. Presión de una barra de hierro. ¿Que altura debe tener una barra de hierro cilíndrica para ejercer una presión de 2.7 Kilo Pascal ?

Solución. Usaremos la fórmula

$$P = h \cdot \rho \cdot 9.8$$

para hallar la altura h de la barra. La densidad del hierro es de $7.86 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$. Luego

$$h = \frac{P}{\rho \cdot 9.8} = \frac{2700}{7.86 \cdot 10^3 \cdot 9.8} = 3.5 \text{ cm.}$$

Por lo tanto la barra debe tener una altura 3.5 cm.

28. Prensa hidráulica. En una prensa hidráulica se tienen dos cilindros de hierro de distinto diámetro, los cuales estan conectados en su parte inferior a un recipiente sellado que contiene agua o aceite. Si se presiona uno de los cilindros entonces la presión se transmite a través del agua y como resultado de ello se mueve el otro cilindro. Si los cilindros tienen secciones laterales de áreas S_1 y S_2 , entonces las fuerzas aplicadas F_1 y F_2 satisfacen la relación

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

Si los cilindros tienen área de la base igual a 10 cm^2 y 93 cm^2 respectivamente
¿ Que fuerza hay que ejercer sobre el primer cilindro para tener una fuerza de 1000 Kg sobre el segundo cilindro ?

Solución. De acuerdo a la fórmula de la prensa hidráulica tenemos

$$F_1 = \frac{S_1}{S_2} F_2 = \frac{10 \text{ cm}^2}{93 \text{ cm}^2} 1000 \text{ Kg}$$

$$F_1 = 107.52 \text{ Kg.}$$

Luego con esta prensa hidráulica se requiere ejercer un peso de 107.5 Kg en un extremo para levantar un peso de 1000 Kg. en el otro extremo.

1.5 Problemas de Ondas

41. Ondas Sísmicas. La velocidad de propagación de las ondas sísmicas en una cierta zona es de 400m/sg Si una onda alcanza una frecuencia de 10 Hz, hallar su longitud de onda.

Solución. Sabemos que la relación entre la velocidad v , la frecuencia ν y la longitud de onda λ viene expresada por

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

Luego se obtiene

$$\lambda = \frac{400 \text{ m/sg}}{10 \text{ Hz}} = 40 \text{ m.}$$

Por lo tanto, la longitud de onda es de 40 metros.

42. Espectro Visible. El espectro visible o luz blanca que podemos percibir a traves de los ojos esta formado por ciertas ondas electromagnéticas. A cada tipo de color le corresponde una determinada frecuencia de vibración de estas ondas. Si la luz se propaga a una velocidad de $3 \cdot 10^8 \text{ m/sg}$. Hallar la longitud de onda correspondiente a la frecuencia $6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Solución. Sea λ la longitud de onda buscada. Luego

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/sg}}{6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

Luego la longitud de onda es de 500 nm. Esta longitud de onda corresponde al color verde.

43. Emisora de Radio. Una emisora de radio transmite a una frecuencia de 107 KHz con una longitud de onda de 50 metros.¿ A que velocidad viajan estas ondas ? Si la distancia desde la tierra hasta la luna es 384.400 Km ¿ cuanto tiempo tarda en llegar la señal de transmisión a la luna?

Respuesta. Sea v la velocidad con que viajan las ondas. Luego

$$v = \lambda \nu = 50 \text{ m} \cdot 107 \cdot 10^3 \text{ Hz.}$$

$$v = 5.35 \cdot 10^6 \text{ m/sg}$$

El tiempo que tarda en llegar a la luna estas ondas es

$$t = \frac{h}{v}$$

donde v es la velocidad de las ondas y h es la distancia desde la tierra hasta la luna, luego

$$t = \frac{384.4 \cdot 10^6 \text{ m}}{5.35 \cdot 10^6 \text{ m/sg}}$$

$$t = 71.85 \text{ sg}$$

Por lo tanto la transmisión tarda un minuto y 12 segundos en llegar a la luna.

21. Velocidad del sonido. La velocidad del sonido en el aire es de 331 m/sg mientras que en el hierro es de 5130 m/sg . Si una persona golpea con un martillo una guaya del teleférico en un extremo, entonces otra persona en el extremo opuesto oirá dos golpes: uno a través de la guaya y otro a través del aire. ¿Cual será la longitud de la guaya, si los dos sonidos se oyen con una diferencia de 3 segundos ?

Solución. Sea t_1 el tiempo que tarda el sonido en viajar a través de la guaya y t_2 el tiempo que tarda en viajar a través del aire. Luego

$$t_1 = \frac{X}{5130 \text{ m/sg.}}$$

y

$$t_2 = \frac{X}{331.45 \text{ m/sg.}}$$

donde X es la longitud de la guaya. Como $t_1 = t_2 + 3$, se tiene la relación

$$\frac{X}{5130 \text{ m/sg.}} + 3 = \frac{X}{331.45 \text{ m/sg.}}$$

de donde

$$X(5130 - 331.45) = 3 \cdot (331.45)(5130)$$

$$X = 1063 \text{ m.}$$

Luego la guaya tiene una longitud de 1063 m. de largo.

22. Efecto Doppler. Dos automóviles A y B viajan por una carretera en el mismo sentido, a velocidades de 30 Km/h y 150 Km/h respectivamente. El auto B se encuentra detrás de A y toca la bocina para adelantarle, la cual tiene una frecuencia de 600 Hz.

¿ Con que frecuencia de sonido oye el conductor de A el ruido de la bocina ?

Solución. Sea V la frecuencia de sonido recibida por el conductor de A. Entonces se satisface la relación

$$V = \left(\frac{v - v_A}{v - v_B} \right) \cdot 600Hz.$$

donde v es la velocidad del sonido a través del aire y v_A , y v_B son las velocidades de los autos A y B respectivamente, en metros sobre segundo. Luego

$$V = \left(\frac{340 - 8.333}{340 - 41.66} \right) \cdot 600Hz.$$

$$V = \frac{331.67}{298.34} \cdot 600Hz. = 667.03Hz.$$

Luego el conductor del auto A oye mas fuerte la bocina de B, con una frecuencia de 667.03 Hz.

1.6 Problemas de Electricidad

10. Resistencia Eléctrica. Cuando dos resistores se colocan en paralelo, la resistencia total R satisface la relación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

siendo R_1 y R_2 las resistencias en Ohms de ambos resistores.

Si R_2 tiene 5 Ohms mas que R_1 y la resistencia total es de 6 Ohms ¿ Cuanto valen R_1 y R_2 ?

Solución. Se tiene la relación

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + 5}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $R_1(R_1 + 5)$ nos da

$$\frac{1}{6}R_1(R_1 + 5) = (R_1 + 5) + R_1$$

de donde

$$R_1^2 + 5R_1 = 12R_1 + 30$$

Agrupando términos nos queda

$$R_1^2 - 7R_1 - 30 = 0$$

Factorizando se tiene

$$(R_1 - 10)(R_1 + 3) = 0$$

Como R_1 debe ser positivo, tomamos $R_1 = 10$. Luego los resitores R_1 y R_2 valen 10ω y 15ω respectivamente.

1.7 Problemas de Química

15. Número de moles de una sustancia. En Química se usa la unidad de 1 Mol para designar $6.02 \cdot 10^{23}$ átomos o moléculas, cantidad esta que se conoce como el **Número de Avogadro**, y se designa por N_A . De acuerdo a esto, la masa asociada a un Mol de una sustancia S , se calcula

$$m(S) = m \cdot gr.$$

donde m es la **masa atómica** de la sustancia, la cual depende del tipo de átomos que intervengan en la formación de la molécula.

Si las masas atómicas del hidrógeno y el oxígeno son 1 y 6 respectivamente, calcular la masa de 5.6 moles de agua.

Solución Sea $m(H_2O)$ la masa de la molécula de agua. Entonces

$$m(H_2O) = 2 \cdot m(H) + m(O) = 2 \cdot 1 + 16 = 18g.$$

Luego un mol de agua pesa 18 g. Por lo tanto 5.6 moles de agua tienen una masa igual a $5.6 \cdot 18g. = 100.8g.$

16. Moléculas en un gramo de agua. Usando el problema anterior, calcule el número de moléculas en un gramo de agua.

Solución. Sea N el número de moléculas en un gramo de agua. Sabemos que 1 mol de agua tiene una masa de 18g. Luego el número de moles en un gramo es

$$n = \frac{1}{18} \cdot 1g. = 0.0555556$$

Por lo tanto se tiene

$$N = n \cdot N_A = 0.0555556 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}$$

de donde

$$N = 3.344444 \cdot 10^{22}$$

Es decir, dentro de un gramo de agua hay $3.344444 \cdot 10^{22}$ moléculas.

17. Volúmen de un gas. Se sabe que 1 Mol de una sustancia en estado gaseoso y bajo condiciones normales (C.N.) de temperatura y presión ocupa un volúmen de 22.4 lt. Estas condiciones normales son para la temperatura $0^\circ = 273K.$ y para la presión 760 mm. de Mercurio.

Si un gas Metano CH_4 ocupa un volúmen de 10 lt, calcular la cantidad de moléculas y el peso de dicho gas.

Solución. sea N el número de moles, entonces

$$N = \frac{10lt.}{22.4lt.} = 0.4464286mol$$

Luego la cantidad de moléculas en dicho gas, viene expresada por

$$n = N \cdot N_A = 0.4464286 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}$$

$$n = 26875 \cdot 10^{19}$$

Para calcular el peso del gas, necesitamos su masa atómica, la cual es

$$m(CH_4) = m(C) + 4m(H) = 12 + 4 = 16.$$

Luego, cada mol de este gas tiene una masa de 16 g. y por lo tanto la masa de 10 lt. es

$$m = 0.4464286 \text{ mol} \cdot 16g/mol = 7.1428576g.$$

Luego 10 litros de metano bajo condiciones normales pesan aproximadamente 7.14 gramos.

1.8 Problemas de Gases

18.Presurización de un gas. ¿A que presión hay que someter 10 lt. de metano en condiciones normales, para llevarlo a 1 lt ?

solución. Par resolver este problema usamos la **ecuación de estado** de los gases

$$p \cdot V = N \cdot R \cdot T$$

Siendo V el volumen del gas, T su temperatura, N el número de moles y R la **Constante de los gases** ,

$$R = 8.3144 JK^{-1}mol^{-1}$$

Luego

$$p = \frac{N \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0.4464286 \cdot 8.3144 \cdot 273}{0.001} \frac{Newton \cdot m}{m^3} = 1013317.5 Newton/m^2$$

Expresando esta presión en otras unidades nos queda

$$p = 1013.3 Newton/cm^2 = 9930.5 Kg/cm^2$$

19. Volumen de un gramo de Helio. Hallar el volumen ocupado por un gramo de Helio en condiciones normales.

Solución. Sea V el volumen del Helio. Entonces el número de moles en un gramo de Helio es

$$N = \frac{1g.}{m_A},$$

donde m_A es la masa atómica del Helio, la cual es $4g/mol$. Luego

$$N = \frac{1g.}{4g/mol} = 0.25mol$$

Sabemos que 1 mol de gas ocupa 22.4 lt. y por lo tanto 0.25 moles ocupan el volumen V . Por lo tanto

$$V = 0.25 \cdot 22.4lt. = 5.6lt.$$

20. Mezcla de gases. ¿Que capacidad debe tener una botella para contener un gramo de Oxígeno y otro de Helio en condiciones normales? ¿Que proporción en volumen de Helio y Oxígeno se tiene en la botella ?

Solución. Sea C la capacidad en litros de la botella. Se sabe que 1 gramo de Helio ocupa 5.6 lt. de la misma manera, se puede determinar que un gramo de Oxígeno ocupa 1.4 lt. Luego

$$C = 5.6 + 1.4 = 7.0lt.$$

Para responder a la segunda pregunta, Hallamos el cociente entre cada volumen y el volumen total. De esta manera calculamos la proporción de Helio

$$X_1 = \frac{5.6}{7} = 80 \%$$

y la proporción de Oxígeno

$$X_2 = \frac{1.4}{7} = 20 \%.$$

23. Dilatación de un gas. Si un gas se calienta o enfría a una presión constante, el nuevo volumen viene dado por

$$V = V_0(\Delta T \cdot k_v + 1)$$

donde V_0 es el volumen inicial, ΔT es el incremento de temperatura en grados Kelvin y k_v es el **coeficiente de dilatación**, el cual es igual para todos los gases y esta dado por

$$k_v = 0.003661K^{-1}$$

Calcule el incremento de volumen de 523.6 lt. de un gas, al pasar de 25° a 0° .

Solución. Sea V el volumen a calcular y ΔT el incremento de temperatura, el cual es negativo en este problema. Para hallar este último transformamos los grados centígrados a Kelvin

$$0^\circ = 273K$$

$$25^\circ = (25 + 273)K = 298K.$$

por lo tanto $\Delta T = -25K$. Luego

$$V = 523.6lt.(-25K \cdot 0.00366K^{-1} + 1) = 457.67lt.$$

Luego el gas ocupa un volumen de 457.67 lt.

24. Peso de un globo. Un globo aerostático pesa 50 Kg. sin inflar. Al inflarse con Helio tiene un radio de 5m. ¿Cuanto pesa el globo a la temperatura de 25° ?

Solución. Sea V el volumen del globo inflado. Luego

$$V = \frac{4\pi(5m)^3}{3} = 523.5 \cdot 10^3lt.$$

Seguidamente llevamos este volumen a 0° , lo cual nos da (ver el problema anterior) $V' = 457677.51$ lt. Sabemos que un gramo de helio en condiciones normales, ocupa un volumen de 5.6 lt. Luego el peso del gas dentro del globo es

$$Peso = \frac{457677.51lt \cdot gr.}{5.6lt} = 81728.1gr.$$

Luego el peso del globo inflado es de 131. 7281 Kg.

29. cambio de volumen con la altura. Si un gas esta sometido a una presión, entonces, si la temperatura permanece constante, al cambiar la presión cambia el volumen, de acuerdo a la ley de los gases. Si un gas ocupa un recipiente cilindrico de altura h_1 al llevar este recipiente a un punto mas alto, el volumen del gas aumenta y por lo tanto se tiene otra altura mayor h_2 . La relación entre estas alturas viene dada por

$$h_2 = \frac{P_1}{P_2} h_1$$

¿ en que porcentaje varía esta altura si el recipiente de gas se lleva desde el nivel del mar hasta el Pico Bolívar?

Solución. Tenemos entonces

$$h_2 = \frac{761 \text{ mm.}}{420.5 \text{ mm.}} h_1 = 1.8 h_1$$

Por lo tanto la altura del gas aumenta en un 80 % . Esta misma relación se mantiene entre los volúmenes de los gases. Debido a este fenómeno, los gases en el interior de nuestro organismo aumentan de volumen a medida que vamos ascendiendo por una montaña y esto ocasiona trastornos conocidos como " Mal de Páramo".

1.9 Problemas de Biología

14. Modelo logístico de Crecimiento de Poblaciones. En este modelo ecológico, supondremos que tenemos un ecosistema en donde hay una especie que puede alcanzar un tope maximo de población M. Si la población sobrepasa a M, entonces hay excases de alimentos y todos los miembros mueren. Sea P_n una porción de M para una generación n y P_{n+1} la porción de la población en la siguiente generación. Luego P_n es un número real entre cero y uno, para cualquier n.

Se tiene entonces la fórmula de recurrencia

$$P_{n+1} = \lambda P_n (1 - P_n)$$

donde λ es una constante que depende de la especie y $0 < \lambda < 4$.

Si $\lambda = 3$, entonces que porcentaje de la población se requiere en una generación dada, para alcanzar una porción de $2/3$ del total de población, dos generaciones mas adelante.

Solución. Sea $P_0 = P$ la cantidad de población a determinar. Aplicando la fórmula de recurrencia para obtener la siguiente generación nos da

$$P_1 = 3P(1 - P)$$

y aplicando nuevamente la fórmula, para hallar la siguiente generación

$$P_2 = 3P_1(1 - P_1) = 3(3P(1 - P))(1 - 3P(1 - P))$$

Multiplicando términos y usando la hipótesis $P_2 = 2/3$, nos queda

$$3(3P(1-P)(1-3P(1-P))) = \frac{2}{3}$$

$$(9P - 9P^2)(1 - 3P + 3P^2) = \frac{2}{3}$$

$$9P - 27P^2 + 26P^3 - 9P^2 + 27P^3 - 27P^4 = \frac{2}{3}$$

Agrupando términos nos queda

$$-27P^4 + 54P^3 - 36P^2 + 9P - 2/3 = 0$$

Multiplicando por 3 en ambos lados

$$-81P^4 + 162P^3 - 108P^2 + 27P - 2 = 0$$

Usando el algoritmo de Ruffini, procedemos ahora a factorizar el polinomio

$$T(P) = -81P^4 + 162P^3 - 108P^2 + 27P - 2$$

lo cual nos da

$$T(P) = (P - 1/3)(P - 3/3)(P - (\frac{3 + \sqrt{5}}{2}))(P - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})$$

De entre estas soluciones, escogemos solo las positivas y menores que 1, las cuales son: $1/3$, $2/3$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

El lector puede observar que la solución $P = 2/3$ es bastante especial, pues la población permanece estable en el tiempo.

Mas problemas para resolver

1. Velocidad promedio. Un auto viaja desde una ciudad A hasta otra B a una velocidad promedio de 100 Km/h . El tiempo empleado en llegar a B fue de 3 horas

y 16 minutos. Si durante la primera hora se desplazó a 110 Km/h ¿ A que velocidad promedio deberá recorrer el resto del trayecto ?

Respuesta. A 92.92 Km/h .

2. Un par de números naturales. Hallar un par de números naturales, tales que la diferencia entre el mayor y el menor es igual al doble del menor mas uno, y su producto es 310.

Respuesta. 31 y 10.

3. Recorriendo los pueblos. Un auto recorre 6 pueblos en un trayecto de 250 Km, a una velocidad promedio de 100 Km/h . A medida que el auto avanza, los pueblos se acercan cada vez mas. Si en cada recorrido entre un pueblo y el vecino tarda cinco minutos menos que en el recorrido anterior ¿ Cual es la distancia que separa los pueblos ?

Respuesta. 66.66 Km, 58.33 Km, 50 Km , 41.66 Km y 33.33 Km.

4. Volumen de un gas. La fórmula del propano es C_3H_8 ¿ Que volumen de propano en condiciones normales ocupan Kg. de dicho gas ?

Respuesta. 21890 lt.

5. Número de moléculas. Sabiendo que la fórmula del Cloro-etano es $CH_3 - CH_2 - Cl$, hallar el número de moléculas en un gramo de esta sustancia.

Respuesta. $9.34 \cdot 10^{21}$.

6. Compresión de un gas. Una bombona de gas propano, de las que usamos en las casas para cocinar, tiene un volumen 150 lt. ¿ Cual es la presión a la cual está

sometido el gas a cero grados ?

Respuesta. $1478.8 Kg/cm^2$.

7. Temperatura de un gas. Se tiene una bombona de gas propano como la descrita en el problema anterior. ¿ A que temperatura debe ser sometida para tener una presión del gas de $2000 Kg/cm^2$?

Respuesta. 96.31 grados centígrados.

8. El eco de una montaña. Una persona hace explotar un mortero frente a una montaña y tarda 10 segundos en oír el eco ¿ A que distancia se halla la persona de la montaña?

Respuesta. a 1657.25 m.

9. Efecto Doppler. Un auto A se desplaza a 120 Km/h y toca la bocina a otro auto que viene hacia él con una velocidad de 95 Km/h. Si la bocina tiene una frecuencia de sonido de 550 Hz. ¿ Que frecuencia percibe la persona que viene en el otro auto ?

Ayuda: Usar la fórmula

$$f_1 = \left(\frac{v + v_1}{v - v_2} \right) f_2$$

donde $v = 331.45 m/sg$ es la velocidad del sonido en el aire, v_2 y f_2 son la velocidad y la frecuencia de la fuente que emite el sonido, y v_1 y f_1 son la velocidad y la frecuencia de los receptores del sonido.

Respuesta. 1109.23 Hz.

10. Profundidad de una fosa marina. Se sabe que la velocidad del sonido en agua salada es 1532.8 m/sg. Si se hace estallar una carga de dinamita a nivel del

mar y se recibe el eco a los 6 sg. ¿ Cual es la profundidad del mar en dicha zona ?

Respuesta. 4598.4 metros de profundidad.

11. Fórmula Orbital. Usando la fórmula de la velocidad de un satélite en órbita, y la fórmula del período, demuestre que la distancia d desde el satélite a la tierra es

$$d = \sqrt{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} - R$$

donde T es el período, G es la constante de gravitación Universal $G = 6.673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}$, M es la mas de la tierra y R es el radio de la tierra.

12. Orbita de un satélite. Usando la fórmula anterior, calcular la altura sobre al tierra a la cual debe volar un satélite para dar una vuelta a la tierra cada dos horas.

Respuesta. 1646 Km.

13. Distancia de la tierra a la luna. Usando la fórmula orbital, calcule la distancia de la tierra a la luna.

Ayuda: Usar $T = 27.32166$ días.

Respuesta. 383.371 Km.

Nota: Debido a otros factores que no entran en consideración, el resultado real es un poco diferente. La verdadera distancia es de 384.400 Km.

14. Un satélite fijo en el cielo. Si un satélite da una vuelta completa alrededor de la tierra cada 24 horas, entonces desde la tierra aparece como un objeto inmóvil en el cielo. Este tipo de satélites es muy importante en comunicaciones. calcule la altura sobre la tierra de dicho satélite.

Respuesta. 35898 Km.

15. Gravedad de Jupiter. Calcular la furza de gravedad en el planeta Jupiter,

sabiendo que su masa es $M = 1.9 \cdot 10^{27} \text{ Kg.}$ y su radio es $R = 7.14 \cdot 10^7 \text{ m.}$

Respuesta. 177.5 m/sg^2 .

16. Aleación de aluminio. Si se combinan 96 % de aluminio con 4 % de cobre se obtiene una aleación metálica. ¿ Que cantidad de cada elemento se necesita para producir 150 Kg. de esta aleación ?

Respuesta. 6 Kg. de cobre y 144 Kg. de aluminio.

17. Otra aleación de Aluminio. Si se tienen 160 Kg. de una aleación de 96 % de aluminio y 4 % de cobre ¿ Que cantidad de cobre hay que agregarle a la aleación para obtener una nueva con 6 % de cobre ?

Respuesta. 3.2 Kg. de cobre.

18. Encuentro en una carretera. Un auto sale a las 10:00 a.m. desde una ciudad A a una velocidad de 120 Km/h . Algunos minutos mas tarde otro auto sale de A y rebasa al primero, después de haber recorrido 100 Km. a una velocidad constante de 135 Km/h. ¿ A que hora salió el segundo auto de A?

Respuesta. a las 10 horas, 5 minutos y 30 segundos.

19. Un cultivo de bacterias. La población P de un cultivo de bacterias en un tiempo t viene expresada en la siguiente fórmula

$$P = P_0 \left(1 + \frac{3t^2}{50 + t^2} \right)$$

donde P_0 es la población inicial y t es el tiempo en horas.

Hallar el tiempo necesario para que para que una población de 1000 bacterias pase a 2000 bacterias.

Respuesta. 5 horas.

20.Barómetro de agua. ¿ Que altura debería tener un barómetro hecho de agua

en vez de mercurio ?

Respuesta. 10.325 m.

21. Presión submarina. ¿ Que presión se tiene a una profundidad de 200 m. debajo del agua ?

Respuesta. 19.32 atm.

22. Si la densidad del aire a nivel del mar es de 1.2922 Kg/m^3 ¿ Que altura debe tener una columna de aire para ejercer la presión de 1 atm?

Respuesta. 7.998 m.

1.10 Problemas de Energía y Petróleo

En esta sección daremos algunas aplicaciones de la matemática en el campo de la Energía y el Petróleo. Venezuela es uno de los mayores productores de petróleo del mundo. A partir del petróleo bruto se pueden extraer una gran cantidad de sustancias con alto poder de combustión, llamadas hidrocarburos.

Trabajo y Potencia.

El trabajo en Física se define como el producto de una fuerza aplicada a un objeto para ponerlo en movimiento, por la distancia recorrida. Usamos la letra W para indicar trabajo. Así pues

$$W = F \cdot d$$

donde F es la fuerza aplicada y d es el desplazamiento. La unidad de trabajo mas usada es el Joule, el cual se define

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newton} \cdot 1 \text{ metro} = 1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{sg}^2$$

La potencia se define como la cantidad de trabajo realizada por unidad de tiempo. Usamos pa letra P para indicar la potencia. Luego

$$P = \frac{W}{t}$$

La unidad de potencia mas usada es el Watt, que se denota por w y viene definida por

$$1 \text{ Watt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ sg}} = 1 \text{ Kgm}^2/\text{sg}^2$$

También se utilizan los múltiplos del watt

$$1 \text{ Kilowatt} = 1000 \text{ watt}$$

$$1 \text{ megawatt} = 10^6 \text{ watt}$$

Otra unidad muy empleada por los ingenieros es el caballo de fuerza, la cual se denota por HP. Esta se define

$$1 \text{ HP} = 745.7 \text{ watt}$$

Finalmente, tenemos otra unidad de trabajo muy usada llamada el Kilovatio-hora, la cual se denota por Kwh y se define

$$1 \text{ Kwh} = (10^3 w) \cdot 3600 \text{ sg} = 3.6 \cdot 10^6 J.$$

La Energía se define como la capacidad de un cuerpo para realizar trabajo. Por lo tanto usamos unidades de trabajo para la energía. Una de las unidades mas usadas en energía es la Caloría, la cual se denota por cal. y se define como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua en un grado Celcius. La equivalencia a Joules es la siguiente

$$1 \text{ cal} = 4.1840 \text{ Joules}$$

También se utiliza la Kilocaloría la cual es igual a mil calorías, y se denota por Kcal. La equivalencia entre esta y el Kwh es

$$1 \text{ Kcal} = 0.0011622 \text{ Kwh}$$

$$1 \text{ Kwh} = 860.42 \text{ Kcal.}$$

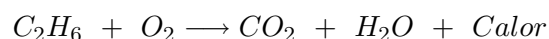
Los hidrocarburos. Los hidrocarburos son sustancias orgánicas, formadas por átomos de carbono e hidrógeno. Ellos generan mucha energía durante la oxidación, razón por la cual son utilizados como combustibles de motores. Entre los hidrocarburos mas estudiados, estan los alcanos, alquenos, alquinos, los aromáticos,...etc.

La serie de los alcanos esta formada por sustancias del tipo general C_nH_{2n+2} . Entre los mas importantes tenemos

1. Metano - CH_4
2. Etano - C_2H_6
3. Propano - C_3H_8
4. Butano - C_4H_{10}
5. pentano - C_5H_{12}
6. exano - C_6H_{14}
7. heptano - C_7H_{16}
8. octano - C_8H_{18}

De metano a butano son gaseosos; de pentano a hexadecano son líquidos; de heptadecano en adelante son sólidos a temperatura ambiente.

1. Combustión del etano. El etano se oxida en presencia de aire (que contiene oxigeno) para liberar agua, calor y CO_2 (dióxido de carbono) de acuerdo a la ecuación



¿ Cuantos moles de oxigeno se requieren para la combustión de 1 mol de C_2H_6 ?

¿ Cuantas Kilo calorías se producen en esta reacción?

Solución. La ecuación balanceada es



Luego 1 mol de C_2H_6 requiere de $7/2$ moles de O_2 para reaccionar.

La cantidad de calor para cualquier alcano se calcula

$$\Delta H = N \cdot valencia \cdot 26.05 Kcal/mol$$

donde N es el número de moles. En el caso del etano su valencia es $v = 2(4) + 6 = 14$. Luego se tiene

$$\Delta H = 1mol \cdot 14 \cdot 26.05 Kcal/mol = 364.7 Kcal.$$

Luego un mol de etano libera al oxidarse 364.7 Kcal.

2. Cantidad de calor en un litro de etano. ¿ Que cantidad de calor produce la combustión de un litro de etano ?

Solución. En primer lugar calculamos el número de moles N en un litro de etano

$$N = \frac{1}{22.4 \text{ lt/mol}} = 0.0446 \text{ moles}$$

Luego usamos los resultados obtenidos en el problema anterior para calcular la cantidad de calor ΔH . Así pues se tiene

$$\Delta H = 364.7 Kcal/mol \cdot 0.0446 \text{ moles} = 16.28 Kcal.$$

Por lo tanto, un litro de etano produce 16.28 Kcal.

3. Dioxido de carbono. ¿ Cuantos litros de CO_2 produce la combustión de 5 litros de etano ?

Solución. Usando la ecuación de oxidación del etano, vemos que dos

volúmenes de C_2H_4 producen 4 volúmenes de CO_2 . Por lo tanto 5 litros de C_2H_6 producen 6 litros de dióxido de carbono.

4. Energía en un litro de etano. ¿ Cuantos Kwh produce la combustión de 1 litro de etano?

Solución. Sea x el número de Kilowatts-hora. Entonces, de acuerdo a lo visto en los problemas anteriores se tendrá

$$x = \frac{16.28 \cdot 1000 \cdot 4.1840}{3.6 \cdot 10^6} = 0.01892 \text{ Kwh}$$

5. Producción de 1 Kwh con etano. ¿ Cuantos litros de etano son necesarios para producir 1 Kwh ?

Solución. Sea n la cantidad en litros. Entonces usando el problema anterior se tiene

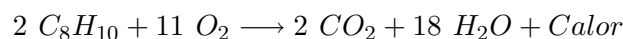
$$n = \frac{1}{0.01892} = 53.70 \text{ litros.}$$

Entonces para producir un Kilowatio-hora se requieren de 53.70 litros de etano. veremos mas adelante que los alcanos mas pesados producen menos energía durante la combustión.

6. Agua producida en la combustión del octano. ¿ Cuantos moles de agua se producen en la combustión de un mol de octano? ¿ Cuantos litros de agua producen 50 litros de octano al quemarse?

La densidad del octano es de 0.7 g/cc.

Solución. La ecuación de oxidación del octano, viene expresada por



luego, dos moles de octano producen 18 moles de agua. De acuerdo a esto se tendrá que 1 mol de octano produce 9 moles de agua.

Para calcular el número de moles en 50 litros de octano, buscamos primero la cantidad en gramos de esta sustancia, la cual llamaremos m , luego

$$m = 50000cc \cdot 0.7gr/cc = 35000g.$$

Por otro lado calculamos su Masa Molar M

$$M = 8(12) + 18(1) = 114$$

Luego el número de moles es igual a la masa del compuesto, dividido entre su masa molar y por lo tanto

$$N = \frac{35000g}{114} = 307.01 \text{ moles}$$

Por lo tanto se producen $9 \cdot 307.01 = 2763$ moles de agua. Para hallar la cantidad de agua en gramos, multiplicamos esta última cantidad por la Masa Molar del agua, la cual es 18. Por lo tanto se tienen 49763.8 gramos de agua. Podemos decir entonces que se producen aproximadamente 50 litros de agua por la combustión de 50 litros de octano.

7. Producción de 1 Kwh con octano. ¿ Cuantos litros de octano se necesitan para producir 1 Kwh ?

Solución. En primer lugar hallamos la energía que se desprende al quemar un mol, la cual viene dada por

$$\Delta H = \text{valencia} \cdot 26.05 \text{ Kcal/mol}$$

la valencia del octano es $8(4) + 18 = 50$. Luego

$$\Delta H = 50 \cdot 26.05 \text{ Kcal/mol} = 1305 \text{ Kcal}$$

La mas de un litro de octano es 700 g. Sea N el número de moles en estos 700g. luego

$$N = \frac{700}{114} = 6.14 \text{ moles}$$

Luego la cantidad de calor producida por estos 6.14 moles es

$$\begin{aligned} E &= 6.14 \cdot \Delta H \\ &= 6.14 \text{ mol} \cdot 1305 \text{ Kcal/mol} \\ &= 8.0127 \text{ Kcal} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (8.0127)(0.0011622) \\
 &= 0.0093Kwh
 \end{aligned}$$

Por lo tanto un litro de octano produce 0.0093 Kwh. Es decir, para producir un Kwh se requiere de $(0.0093)^{-1} = 107.52$ litros de octano.

8. Eficiencia de un motor. Calcule la eficiencia de un motor que produce una potencia de 1 kwh con 150 litros de octano.

Solución La eficiencia del motor es igual a la energía producida por la combustión, entre la energía producida por el motor. Luego

$$E = \frac{1Kwh}{150 \cdot 0.0093Kwh} = 0.7168459$$

Luego la eficiencia del motor es del 71.68 % .

9. Combustión del gasoil. El gasoil se obtiene a partir de la destilación fraccionada del petróleo entre las temperaturas de $180\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $370\text{ }^{\circ}\text{C}$. El poder calorífico del mismo es de 9700 Cal/Kg, y la densidad del compuesto es de 0.82 g/cc ¿ Cuantas calorías produce la combustión de un litro de gasoil? ¿ Cuantos litros se requieren para producir 1 Kwh ?

Solución. Sea ΔH las calorías producidas por un litro del compuesto. Luego

$$\Delta H = 9700\text{ Cal/Kg} \cdot 0.82\text{ Kg/lt} = 7954\text{ Cal/lt.}$$

$$\Delta H = 7.954\text{ Kcal/lt.}$$

Podemos pasar estas calorías a Kwh

$$\Delta H = 7.954 \cdot 0.001162 = 0.0092441\text{ Kwh}$$

Luego se requieren $(0.0092441)^{-1} = 108.7$ litros de gasoil para producir 1 Kwh.

10. Consumo de gasoil. Una planta eléctrica de gasoil tiene una potencia

de 15 HP. y una eficiencia del 70 % ¿ Cuantos litros de gasoil consume esta planta trabajando durante 5 horas ?

Solución. En primer lugar, necesitamos hacer la transformación de unidades de potencia a Watts

$$15HP = 15 \cdot 745.7w/sg = 11.185Kw/sg.$$

La energía desarrollada en 5 horas es

$$E = 5 \cdot \left(\frac{11.185}{3600} \right) Kwh = 0.0155Kwh.$$

Luego calculamos la cantidad de litros de gasoil, requeridos para desarrollar esta energía. Estos son

$$V_1 = 0.0155 \cdot 108.7 = 1.68 \text{ lt.}$$

El volumen real de gasoil, se obtiene dividiendo este volumen entre la eficiencia de la planta. Luego

$$V = \frac{V_1}{0.7} = \frac{1.68}{0.7} = 2.4 \text{ litros}$$

11. Fórmula del consumo de gasoil. Utilizando la experiencia del problema anterior, halle una fórmula para calcular la cantidad de litros de gasoil que consume una planta de P caballos de potencia, con una eficiencia e y trabajando durante h horas.

Solución. Sea V el volumen del gasoil requerido. Siguiendo los mismos pasos del problema anterior se tiene

$$V = \frac{P \cdot 745.7 \cdot h \cdot 108.7}{3600 \cdot e}$$

$$V = 22.51 \frac{P \cdot h}{e} \text{ lts.}$$

donde P es la potencia de la planta, h es el tiempo de trabajo en horas y e es la eficiencia.

12. Consumo de gasoil por mes. Una planta de gasoil de 25 caballos y con una eficiencia del 65 % trabaja 3 horas diarias. Calcule el consumo de gasoil en un mes.

Solución. Sea V el volumen de gasoil que se consume en un mes. Luego, usando la fórmula anterior se tiene

$$V = 22.51 \frac{25 \cdot 90}{0.65} = 77.9 \text{ lt.}$$

Luego la planta consume 77.9 litros de gasoil al mes. Si el litro de gasoil cuesta Bs. 50, entonces la energía producida durante un mes cuesta Bs. 3895.

13. Combustión de la gasolina. La gasolina se obtiene por destilación fraccionada del petróleo entre los 30 y 210 C° . El poder calorífico de la gasolina es de 10400 calorías por Kilogramo. La densidad media de este compuesto es 0.7 ? Cuantos litros de gasolina se requieren para producir 1 Kwh ?

Solución. Sea ΔH la cantidad de calor en un litro de gasolina. Luego

$$\Delta H = 10400 \text{ cal/Kg} \cdot 0.7 \text{ lt/Kg} \cdot 0.0011622 \text{ Kwh/cal} = 0.0084608 \text{ Kwh/lt}$$

Entonces para producir 1 Kwh se requiere $1/\Delta H$ litros. Luego este volumen V se expresa

$$V = (0.0084608)^{-1} = 118.19 \text{ lts.}$$

Por lo tanto se requiere de 118.19 litros de gasolina para producir 1 Kwh.