

Francisco Rivero Mendoza

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de Los Andes

Mérida, Venezuela

Una Representación Semiótica para construir los Números Enteros

1. Introducción: El salto cognitivo entre la aritmética y el álgebra

Uno de los grandes problemas que enfrentan los profesores de Matemáticas de Educación Básica es la introducción adecuada del álgebra a partir del séptimo grado. El joven que venía trabajando con cantidades numéricas concretas en los grados anteriores, debe ahora enfrentarse a la complejidad del álgebra, donde se manejan símbolos que muchas veces carecen de significado concreto. Es ciertamente un salto tremendo entre aritmética y álgebra en donde se inician los procesos de abstracción matemática, y que debe ser abordado con mucha dedicación por parte del docente, para evitar el rechazo hacia la matemática, tan común entre los estudiantes de bachillerato. La primera dificultad que enfrentan estos jóvenes es la comprensión de los números negativos. El concepto de número negativo, por ser tan abstracto y poco intuitivo, requiere del uso inteligente de recursos pedagógicos que sean lo suficientemente simples para ser usado en niños de educación primaria, y por otro lado coherentes desde el punto de vista matemático.

Un buen modelo o representación semiótica, debería facilitar en el mejor de los casos una total comprensión del concepto de número entero, números negativos y las operaciones de suma, resta y producto. Por otro lado, debe ser claro y libre de ambigüedades que puedan entorpecer el aprendizaje posterior del álgebra. Sería también deseable, tener un modelo en donde las operaciones de suma y multiplicación de números enteros, se realice en forma parecida a dichas operaciones en los números naturales.

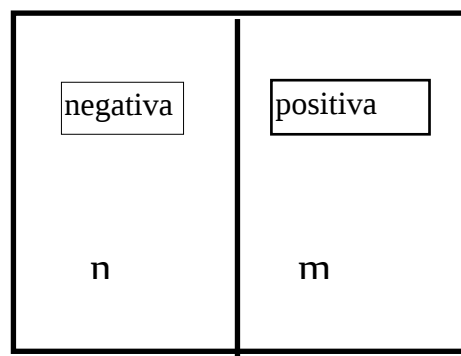
2. El Modelo MOFIP

El modelo que vamos a presentar en este trabajo es del tipo de equilibrio y será denominado **Modelo Operatorio de Fichas en el Plano**, (MOFIP). Para su implementación se requiere de un pedazo de cartulina de forma rectangular, para construir un tablero, y una fichas o monedas. En este modelo se considera a un número entero , como una resta de dos números naturales (minuendo y sustraendo)

$$m - n$$

donde la diferencia carece de sentido, en el contexto de los números naturales si n es mayor o igual a m . En tal sentido, un número entero se puede considerar como un par de números naturales : una positiva y otra negativa, dadas por m y n respectivamente.

Para dar una representación de dicho número, comenzamos por dividir el tablero en dos partes iguales, por medio de una línea vertical. Obtendremos así dos zonas de igual tamaño. La del lado derecho será llamada **positiva** y la del izquierdo será llamada **negativa** . Ver la figura



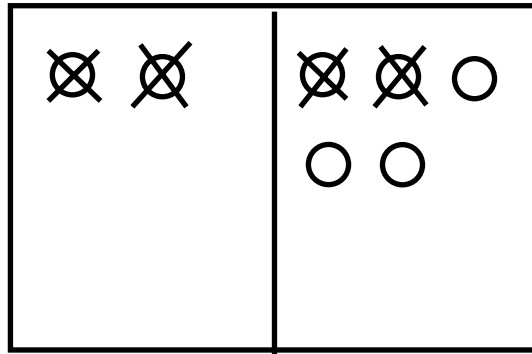
En vez de escribir los números sobre el tablero, usaremos fichas del mismo color e igual tamaño, para representarlos.

Reglas para el uso del modelo

A continuación damos una serie de reglas que permiten utilizar este modelo para la operaciones de suma y resta de números enteros, y la resolución de ecuaciones lineales. Es recomendable en una primera etapa, trabajar con pocas fichas, para que el estudiante se familiarice con el uso del modelo.

Principio de cancelación

Ya hemos visto que todo número entero se representa mediante un conjunto de fichas en ambos lados del tablero. Pues bien, de ahora en adelante se pueden cancelar fichas del lado positivo con las del lado negativo, una a una. De esta manera tendremos al final fichas en un solo lado, o bien ausencia de fichas.

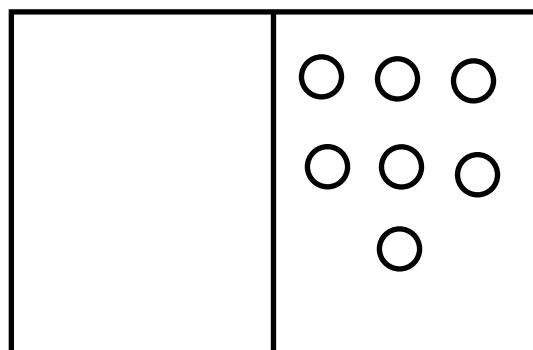


Representación de los números enteros

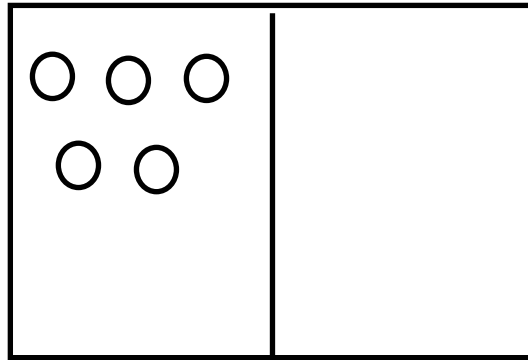
Una vez establecido el principio de cancelación entre las fichas, podemos hacer la identificación entre números enteros y fichas. De acuerdo a la disposición de las fichas en el tablero, se tienen tres tipos de números enteros

- a) *Enteros positivos*, que se representan con fichas del lado derecho
- b) *Enteros negativos*, que se representan con fichas del lado izquierdo
- c) *El cero* que se representa mediante la ausencia de fichas.

Por ejemplo el número entero 7 se puede representar como



El entero - 5 se representa



Suma de números enteros

La suma de enteros se hace por medio de un simple algoritmo de acumulación de fichas, teniendo en cuenta la posición de las mismas, a la derecha o izquierda de la raya central.

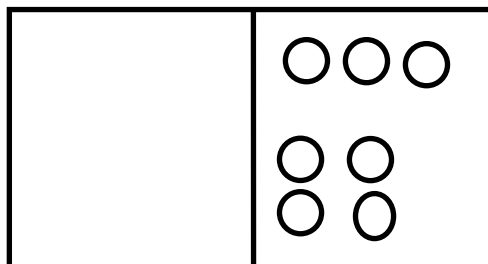
1) **Sumandos con el mismo signo.**

Se debe realizar usando el siguiente algoritmo :

Cuando se suman enteros del mismo signo, se acumulan las fichas en cada lado correspondiente a dichos números.

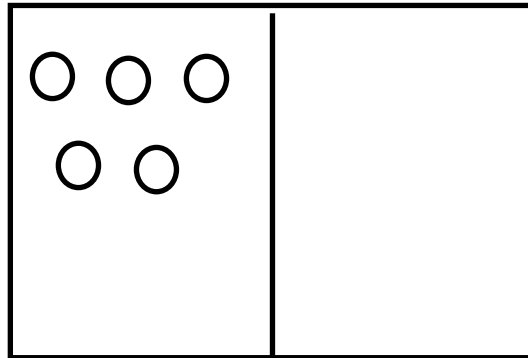
Por ejemplo si se quiere sumar $3 + 4$ entonces se deben realizar los pasos siguientes :

- 1) Se colocan 3 fichas del lado derecho.
- 2) Se colocan 4 fichas del lado derecho.
- 3) Se acumulan las fichas, para obtener 7 fichas en total en el lado derecho y ninguna en el lado izquierdo.
- 4) El resultado es 7.



Si se quiere sumar $-3 + (-2)$ se procede de la manera siguiente :

- 1) Se colocan 3 fichas del lado izquierdo.
- 2) Se colocan 2 fichas del lado izquierdo.
- 3) Se acumulan las fichas, para tener 5 del lado izquierdo y ninguna del lado derecho.
- 4) El resultado es -5.



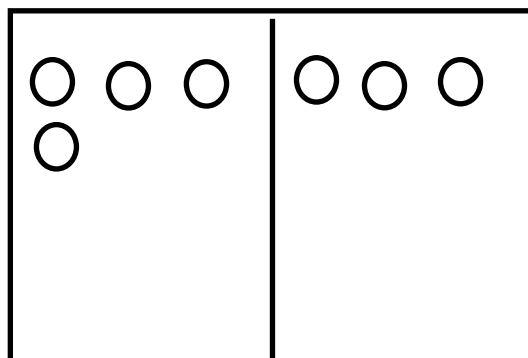
II) Sumandos con signos opuestos

La suma de dos números enteros de distinto signo, se hace repitiendo los mismos pasos que en el caso anterior, pero posteriormente se debe aplicar el principio de cancelación. Cuando se suman enteros de distinto signo se colocan fichas a ambos lados del tablero.

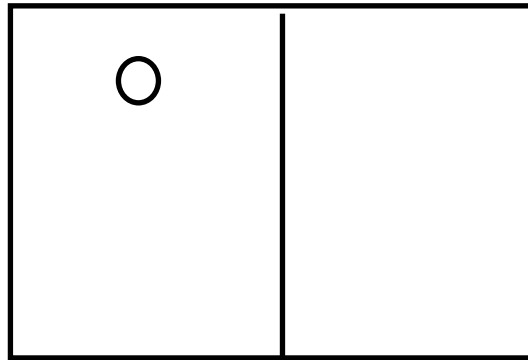
Por ejemplo, si queremos sumar $3 + (-4)$, procedemos de la siguiente forma :

- 1) Se colocan 3 fichas del lado derecho.
- 2) Se colocan 4 fichas del lado izquierdo.
- 3) Se cancelan fichas en ambos lados (Principio de cancelación).
- 4) Al final quedará sólo una ficha del lado izquierdo y por lo tanto el resultado es -1.

El tablero antes de cancelar luce de la siguiente forma :



Una vez que se ha realizado la cancelación de fichas, se obtiene el número entero



El Opuesto de un número entero

Si n es un Número Entero cualquiera, representado por n fichas en alguno de los lados del tablero, entonces el **Opuesto de n** , denotado en símbolos algebraicos por $-n$, se halla representado por n fichas colocadas en el lado opuesto. Es decir, el opuesto o negativo se halla mediante una inversión de fichas. Si a n se le suma su opuesto, siguiendo las reglas de suma, obtenemos cero fichas en el tablero. Como conclusión de esto se deduce la regla algebraica

$$n + (-n) = 0$$

Resta de números enteros

La operación de resta es bastante sencilla de ejecutar en el tablero. El algoritmo de resta es el siguiente :

Si se quiere restar un entero positivo n a un entero z , entonces colocamos en el tablero n fichas en el lado izquierdo del tablero.

Para demostrarle al estudiante la consistencia de este método con su idea intuitiva de restar, quitando cosas, se recomienda hacer unas cuantas restas, en donde el resultado sea positivo. Por ejemplo, hacer las diferencias en el tablero $7-4$, $10-8$,...,etc. y comparar estos resultados con los obtenidos usando simple sustracción. Con esta manera de hacer la resta, el estudiante se puede dar cuenta inmediatamente de la siguiente propiedad de los números enteros :

$$x - n = x + (-n)$$

Es decir, la operación de restarle n a X , es equivalente a la suma de X y $-n$.

También se puede deducir fácilmente que el negativo de $-n$ es n . Con esto podemos ahora restar un número negativo a un entero cualquiera, usando la relación

$$x - (-n) = x + n$$

Es decir, cuando a un entero x se le resta otro entero negativo $-n$, entonces colocamos n fichas en el lado derecho.

Cálculo de expresiones en donde aparecen sumas y diferencias

Para dar una idea de la capacidad operatoria de este modelo, veamos como se pueden realizar varias sumas y diferencias de números enteros, dentro de una misma expresión.

Por ejemplo hallar el valor del número entero

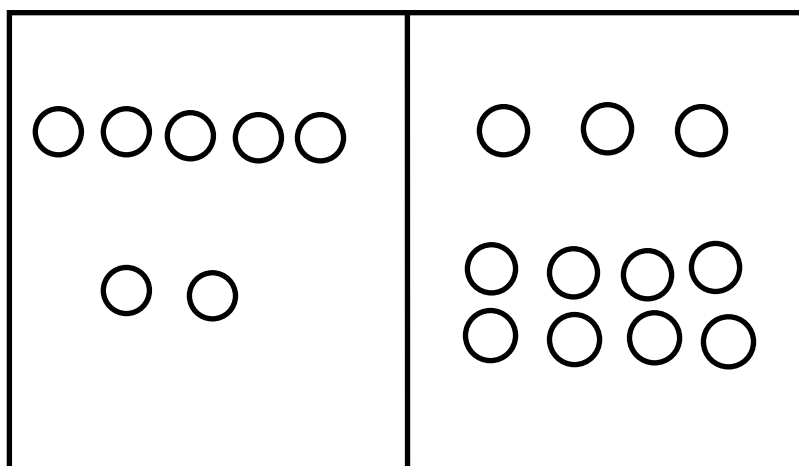
$$3 + (-5) + 8 - 2$$

usando fichas y el tablero.

El procedimiento consiste en colocar las fichas en el siguiente orden

- 1) Tres en lado derecho
- 2) Cinco en el lado izquierdo
- 3) Ocho en lado derecho
- 4) Dos en el lado izquierdo

Después de hacer esto, nuestro tablero luce de la forma siguiente



Seguidamente, aplicamos el principio de cancelación y eliminamos fichas a ambos lados de la raya, una negativa con una positiva, hasta quitar todas de un lado del tablero. De esta forma obtenemos sólo cuatro fichas del lado derecho. Con esto se llega a calcular el valor de x , el cual es igual a cuatro.

Multiplicación de números enteros

La multiplicación de números enteros es fácil de ejecutar en este modelo, siguiendo el siguiente algoritmo :

Si se tiene un número, o una combinación de números, representado en el tablero, entonces la multiplicación de dicho número por un entero positivo n se realiza multiplicando el número de fichas a cada lado del tablero por n .

Por ejemplo si se quiere hallar el resultado de multiplicar 3 por (-4) se ejecutan los pasos

- 1) Se colocan 4 fichas del lado izquierdo
- 2) Se multiplican por 3 dichas fichas
- 3) Al final se tendrán 12 fichas del lado izquierdo
- 4) El resultado de la multiplicación es -12.

Se pueden hacer multiplicaciones de un número entero positivo por una expresión en donde intervienen números enteros, en forma bastante simple. Por ejemplo, si queremos calcular

$$2 (3 - 8)$$

Se ejecutan los siguientes pasos

- 1) Se colocan 3 fichas del lado derecho
- 2) Se colocan 8 fichas del lado izquierdo
- 3) Se duplican las 3 fichas del lado derecho y las ocho fichas del lado izquierdo
- 4) Se tienen ahora 6 fichas en el lado derecho y 16 fichas del lado izquierdo
- 5) Se aplica el principio de cancelación para cancelar fichas en ambos lados

- 6) Al final tendremos sólo 10 fichas del lado izquierdo
- 7) El resultado final es -10.

Para multiplicar un entero por un número negativo $-n$ se deben realizar las mismas instrucciones como en el caso positivo, pero además deben invertirse los términos (cambio de signo) al final. Por ejemplo, si queremos multiplicar ahora (-3) por (-4) , se ejecutan los pasos siguientes :

- 1) Se colocan 4 fichas del lado izquierdo
- 2) Se multiplican por 3 dichas fichas
- 3) Al final se tendrán 12 fichas del lado izquierdo
- 4) Se cambian las 12 fichas al lado derecho
- 5) El resultado de la multiplicación es 12.

La introducción del modelo en el Aula de clases

El uso de este modelo en el aula de clases, puede hacerse de varias maneras, dependiendo de los conocimientos previos que tengan los estudiantes sobre los números enteros. La efectividad del modelo, en el proceso de enseñanza aprendizaje, dependerá por lo tanto del **momento apropiado** para introducirlo, así como también **del proceso de desarrollo del modelo**. Ambos factores pueden darnos un buen resultado si los empleamos correctamente. La aplicación del modelo siguiendo un método errado puede no dar los resultados esperados, e inclusive llegar a ser contraproducente y crear dificultades en el aprendizaje de los números enteros. Es muy importante pues que el docente este bien preparado en el uso del modelo y su aplicación correcta , antes de utilizarlo en el aula de clases.

No voy a estudiar aquí en detalle, algunos factores de otro tipo que puedan obstaculizar el uso del modelo, pero tan sólo nombraré algunos de ellos :

1. *Factores del medio ambiente*. Es importante tener un medio ambiente apropiado para trabajar : como buena iluminación en el aula, una relación adecuada entre profesor y número de alumnos que permita el diálogo directo e individual, un mobiliario que permita manipular el tablero en forma cómoda.
2. *Factores psicológicos* . El docente debe tener un control sobre las reglas del juego y enseñar a los estudiantes en una forma afectiva, para lograr un acercamiento real con

el modelo y no sea rechazado a priori por los estudiantes. No hay que hacer burla de los fracasos o malas interpretaciones por parte del estudiante.

3. *Defectos de construcción en el modelo.* Tanto las fichas como el modelo deben ser de buena calidad, sin llegar a ser excesivamente lujosos o bonitos como para distraer la atención del juego. El color es muy importante cuando se trata de niños, pues esto, naturalmente, les atrae. Todas las fichas deben ser iguales, del mismo tamaño, de la misma forma, para no crear confusiones, incorporando en el juego aspectos que sean irrelevantes y que puedan obstaculizar el aprendizaje.

Para utilizar el modelo dentro del aula nos basamos en una teoría para lograr la competencia en el manejo de los símbolos en matemáticas, desarrollada por James Hiebert (1988). De acuerdo a esta teoría se deben cumplir una serie de pasos en el proceso de desarrollo del modelo en una secuencia lineal, para que la instrucción con el modelo resulte exitosa. El Proceso de desarrollo del modelo se cumple en cinco etapas

1. *Identificación de las fichas en el tablero con los números enteros.* Este proceso debe hacerse en ambos sentidos. Es decir si el docente da un número, entonces los estudiantes deberán colocar las fichas adecuadamente. Recíprocamente, si el docente coloca un grupo de fichas en el tablero, el estudiante deberá identificar dicho número.
2. *Realizar acciones sobre las fichas.* Trabajando con las fichas el estudiante podrá hacer operaciones con ellas como agregar, quitar, mover de un lado a otro. Estas acciones serán llamadas con el nombre de suma, resta, opuesto,...,etc.
3. *Realizar acciones sobre números y símbolos y estudiar las acciones correspondientes sobre el tablero.* Por ejemplo sumar $a + b$ corresponde a colocar a fichas en el tablero, después b fichas, cancelar, si es necesario, y luego contar.
4. *Manejo de símbolos y relaciones entre los enteros en forma rutinaria.* En esta etapa el estudiante trabaja en su cuaderno escribiendo sólo símbolos sobre el papel que representan los números enteros o las reglas entre los números enteros. El estudiante debe repetir todas acciones sobre los símbolos en papel, en el tablero y las fichas. De esta manera las reglas sobre los símbolos tendrán un significado dentro del juego.
5. *Creación de nuevos símbolos y relaciones entre símbolos, a partir de las relaciones ya obtenidas.* En esta etapa final, el estudiante deberá ser capaz de obtener fórmulas

nuevas para manejar los símbolos (Álgebra), las cuales se relacionan con las acciones sobre las fichas en el tablero. Por ejemplo la ley de cancelación para la suma o un algoritmo para decidir si $(-1)^n$ es positivo o negativo.

En cuanto al momento indicado para la introducción del modelo, se recomienda ponerlo en práctica al inicio del estudio de los números enteros (5to, 6to o 7mo grados). Sin embargo es factible , mediante un procedimiento especial de instrucción, usarlo con estudiantes que ya han sido introducidos al estudio de los números enteros.

Conclusiones

La representación semiótica aquí presentada para la construcción de los Números Enteros (MOFIT) posee las siguientes ventajas

- 1) Es de fácil implementación, pues requiere de unos materiales bastante simples.
- 2) Puede ser introducido a niveles de enseñanza bastante elementales como 5to o 6to grado de Educación Básica, debido a la familiaridad de los estudiantes con el manejo e identificación de fichas con números.
- 3) Es muy versátil, pues permite representar a los números enteros, representar las operaciones de suma, resta y multiplicación.
- 4) Es compatible con los otros modelos conocidos de representación de los números enteros.
- 5) Es un método de enseñanza de tipo constructivista. El proceso mediante el cual el estudiante va construyendo el conocimiento matemático, a partir de este modelo concreto, le permite descubrir las reglas de operación que rigen a los números enteros, trasladando sus experiencias del modelo “real” al mundo de los símbolos escritos de la matemática. Cuando el estudiante maneja los términos involucrados en las expresiones, mediante objetos concretos : las fichas, y su posición en el tablero, aprende de la realidad y la experiencia. Posteriormente, trabajando a nivel de símbolos, podrá desarrollar reglas con significado para los símbolos y las relaciones entre ellos.

Bibliografía

- 1) **Bednarz,N.,Kieran,C. y Lee,L.** (1996) *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and teaching.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

- 2) **Duval, R.** (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et des Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg.*
- 3) **Filloy, E :** (1987) Modeling and the teaching of Algebra en J.C. Bergeron, N. Herscovics , and C. Kieran (eds), *Proceedings of PME-XI*, Montreal Canada.
- 4) **Filloy, E and Rojano T. :** (1984) From an arithmetical thought to an algebraic thought, in J. Moser (de.) *Proceedings of PME-NA VI*, Madison, Winsconsin, 51-56.
- 5) **Hefendehl-Hebeker, L .** (1991) Negative Numbers : obstacles in their evolution from intuitive to Intellectual constructs, *For the learning of Mathematics* 11 (1), 26-32 .
- 6) **Herscovics, N. (1989)** Cognitive Obstacles Encounters in the Learning of Algebra. *Reaserch Agenda for mathematical education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M.
- 7) **Herscovics, N. and Linchevsky, L. (1994)** A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics* 27 : 59-78.
- 8) **Hiebert J.** (1988) A Theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics* 19, 333-355.
- 9) **Janvier, C .** (1985) Comparison of models aimed at teaching signed integers, *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, pp. 135-140.
- 9) **Murray, J.C.** (1985) Children's informal conceptions of integer arithmetic, *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, pp. 147-153.
- 10) **Socas, M.M. y Palarea. M.M. (1997)** Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el Algebra Escolar. *Uno*, num. 14, pp. 7-24. Barcelona.
- 11) **Socas M.M, Camacho, M. y Hernández, J. (1998)** Análisis Didáctico del lenguaje Algebraico en la Enseñanza de la secundaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado. Monográfico de Didáctica de la Matemáticas.*