Guía de Ejercicios # 11

1.- Escribir las siguientes sumas haciendo uso del símbolo sumatorio.

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

(b) $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$

(c) $z_0 + z_1 + \cdots + z_k$

(d) $a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

(e) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$

(f) $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots (a_n + n)^2$

(g) $(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \ldots (a_N + b_N)^2$

(h) $\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \dfrac{a_3}{b_3} + \cdots + \dfrac{a_n}{b_n}$

2.- Expandir las siguientes sumas.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} p_i$

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{5} s_k$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_j$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} 2t_k$

(f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} (x_j + y_j)^2$

(g) $\displaystyle\sum_{j=2}^{6} (2j - 3)$

(h) $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} (2i + 1)$

(i) $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} (2i - 5)$

3.- Muestre que

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es constante.

4.- Muestre que

$$\sum_{k=1}^{m} c\, u_k = c \sum_{k=1}^{m} u_k$$

5.- Muestre que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

6.- Muestre que

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j + a) = \sum_{j=1}^{n} x_j + na$$

$a \in \mathbb{R}$ constante.

7.- Si $p, n \in \mathbb{N}$, son tales que $1 < p < n$ entonces muestre que

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{p-1} x_i$$

8.- Muestre que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + a)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a \sum_{i=1}^{n} x_i + na^2$$

9.- Considere la sucesión finita de números $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Muestre que

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k+1}) = b - a$$

10.- Determine el valor de las sumas indicadas.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} 2$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(2i+2)$

(c) $\displaystyle\sum_{i=5}^{8} \frac{1}{i+3}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}(3i-2)$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}(2i-1)$

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}(5i+4)$

(g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{7}(i^2+1)$

(h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(i-1)^3$

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{1+j^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{i=-1}^{3}(i+1)(i-2)$

(k) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{2} 2^k$

(l) $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \frac{2}{k+1}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=2}^{6}(-1)^{k+1}k^2$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})$

(ñ) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} 4i^2(i^2-1)$

11.- En los siguientes problemas, exprese la suma indicada usando la notación sigma.

(a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(2)} + \dfrac{1}{2(3)} + \cdots + \dfrac{1}{2(10)}$

(b) $\ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \cdots + \ln(21)$

(c) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdots + \sqrt{20}$

(d) $\sqrt{2} + \sqrt{1+4} + \sqrt{1+9} \cdots + \sqrt{1+36}$

(e) $\dfrac{1}{1+1} + \dfrac{4}{1+2} + \dfrac{9}{1+3} + \cdots + \dfrac{400}{1+20}$

(f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots - 14^2$

(g) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 16^3$

(h) $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

12.- Haciendo uso del símbolo sumatorio, demuestre que la suma de los primeros n números impares es igual a n^2.

13.- Asuma que

$$a_k = \frac{1+2k}{k}$$

Determine:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k$$

14.- Si $f(x) = 2x - 1$, determine

$$\sum_{k=1}^{3} f(k)$$

15.- Si $f(x) = 3x^2 + 2$, determine

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2} f(2k)$$