Funciones de una Variable

1.- Sean $A = \{-3, 0, 1, 5\}$ y $B = \{0, 1, 2, e\}$. Decida si la relación dada es o no función (justifique). En caso de encontrar una función, determine el dominio, el codominio y el rango.

i) $f(-3) = 0,\ f(0) = 1,\ f(5) = 2,\ f(1) = e.$

ii) $f(-3) = e,\ f(0) = 2,\ f(5) = 1,\ f(-3) = 1, f(1) = 0.$

iii) $f(-3) = 1,\ f(0) = 1,\ f(1) = 0.$

iv) $f(-3) = 1,\ f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(5) = e.$

2.- Dada $f(x) = x^2 - 1$, determine $f(1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(k)$, $f(-6)$, $f(-1/2)$, $f(2t)$, $f(3x)$, $f(1/x)$.

3.- Dada $f(x) = 2x - 1$, determine $f(3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(a+1)$, $f(x+1)$, $f(2x)$, $f(x+h)$, $f(x)+f(h)$, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (suponga que $h \neq 0$).

4.- Sea $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}$, calcular $f(0)$, $f(1/4)$, $f(x^3)$, $f(x+2)$, $f(-t)$, $f(1/z^4)$.

5.- Sea $f(x) = \dfrac{3}{x}$, determine $f(1)$, $f(-3)$, $f(6)$, $f(1/3)$, $f(3/a)$, $\dfrac{f(3)}{f(x)}$, $f(x-3)$, $f(x)+f(3)$, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $(h \neq 0)$.

6.- Para $f(x) = 2x^2 - 1$, encuentre y simplifique la expresión:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (h \neq 0)$$

7.- Para $f(x) = 4x^3$, encuentre y simplifique la expresión

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (h \neq 0)$$

8.- Para $g(u) = \dfrac{3}{u-2}$, encuentre y simplifique la expresión

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (h \neq 0)$$

9.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 - 5$. Determine y simplifique (lo más que pueda) las expresiones:

(a) $\dfrac{f(w) - f(x)}{w - x}$ (b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

10.- Suponga que $f(x) = a\cos(x) + \dfrac{b}{2}$, además que, $f(0) = 1$ y $f(\pi) = 3$. Determine los valores de a y b.

11.- Sea $h(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, Demuestre que:

$$h(a) + h(b) = h\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

12.- Sea $f(x) = \tan(x)$. Demuestre que

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 - [f(x)]^2}$$

13.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$. Demuestre que

(a) $f(a+b) = f(a)f(b)$ (b) $f(a-b) = \dfrac{f(a)}{f(b)}$ (c) $f(nx) = [f(x)]^n$

14.- Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \ln(x)$. Demuestre que

(a) $f(ab) = f(a) + f(b)$ (b) $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$ (c) $f(x^n) = nf(x)$

15.- Dada la función $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$

Hallar, (en caso de ser posible), $g(0)$, $g(-1)$, $g(1/2)$, $g(-1/4)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(6)$, $g(1)$.

16.- Dada la función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

Hallar: $f(0)$, $f(1)$, $f(3/2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(-a^2)$.

17.- Considere $f(x) = 2x - 4$.

(a) Determine las imágenes de $x = -3$, $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$.

(b) Disponga los datos numéricos obtenidos en (a) en forma tabular.

(c) Haga la gráfica de de los puntos en la tabla determinada en (b).

18.- Sea $h(x) = 2^x$. Haga una tabla que muestre la relación para los valores $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ con sus respectivas imágenes.

19.- Determine si el conjunto dado representa al gráfico de una función.

(a) $\{(1,2); (2,3); (1,3); (2,1)\}$

(b) $\{(1,1); (2,3); (3,4); (4,1)\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x - 2y - 12 = 0\}$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x - 16 = 0\}$

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2y + 12 = 0\}$

(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$

(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \sqrt{x-4}\}$

(h) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \sqrt{x^2-4}\right\}$

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 4\}$

(j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 4y^2 = 4\}$

(k) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 = 4\}$

(l) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \sqrt{4-x^2}\right\}$