# Problemas de Combinatoria IV

1. Se tienen 15 computadoras y 10 impresoras. Cada 5 minutos algún subconjunto de computadoras usa impresoras ¿Cuantas diferentes conexiones entre varias computadoras e impresoras son necesarias para garantizar que si 10 (o menos) computadoras quieren imprimir existen siempre conexiones que permiten a esas computadoras usar una impresora diferente? 60

2. Dado un grupo de $n$ mujeres y sus maridos ¿Cuantas personas deben elegirse del grupo de $2n$ personas para garantizar que el conjunto contiene una pareja de casados? $n+1$.

3. Muestre que en una fiesta de 20 personas, existen 2 de ellas que tienen el mismo número de amigos.

4. En un torneo todos contra todos (round-robin) pruebe que dos competidores tiene el mismo número de juegos ganados si cada jugador ha ganado al menos un juego. Mostrar un ejemplo en el cual cada jugador tiene diferente número de juegos ganados en el caso que alguno de ellos pierda todos los juegos.

5. Ocho personas entran a un ascensor en planta baja. Los pasajeros se pueden bajar en cualquier piso hasta que queda vacío en el piso cuarto ¿De cuantas maneras se puede hacer esto si al menos una persona se baja en cada uno de los 4 pisos? (El edificio tiene plana bajo y los pisos 1,2,3 y 4 y las personas se pueden bajar en cualesquiera de los pisos 1, 2, 3 o 4)

   40.824

6. Un hombre tiene 12 medias negras y 12 medias azules revueltas en un cajón ¿Cuantas debe seleccionar (en la oscuridad) para garantizar un par del mismo color? ¿Cuantas debe seleccionar para garantizar un par de medias azules?

7. Si el hombre tiene 6 medias negras, 4 azules y 6 blancas ¿Cuantas debe seleccionar (en la oscuridad) para garantizar un par del mismo color? ¿Cuantas debe seleccionar para garantizar un par de medias blancas?

8. Ponga dos meses en la misma caja si sus decimoterceros días caen el mismo día de la semana.

   (a) Muestre que los doce meses caen en siete cajas distintas (días de la semana).

   (b) Concluya que al menos hay un viernes 13 en cada año.

   (c) Muestre que hay a lo sumo tres viernes trece en el año.

9. En una reunión cualquiera contamos el número de conocidos de cada uno de los presentes y sumamos esas cantidades. Pruebe que esta suma es par.

10. En una fiesta de 30 personas hay 89 pares de conocidos ($\{a, b\}$ es un par de conocidos si $a$ y $b$ se conocen). Pruebe que existe una persona en la fiesta con 5 o menos amigos.

11. Si hay 8 naranjas, 4 manzanas, 5 peras y 6 cambures ¿De cuantas maneras se pueden elegir 15 frutas?

685

12. Dadas las letras $\{3\cdot x,\ 2\cdot y,\ 4\cdot z\}$ ¿Cuantas palabras de longitud 5 existen?

180

13. Dadas las letras $\{\infty\cdot x,\ \infty\cdot y,\ \infty\cdot z\}$. Hallar el número de palabras de longitud 5 que no tengan letras iguales consecutivas.

48

14. Dada cualquier conjunto de $n$ números enteros (no necesariamente distintos), muestre que existe un subconjunto no vacío de ellos tal que la suma de sus elementos es divisible por $n$.

15. Dados $n$ objetos colocados en $m$ cajas, pruebe que si

$$n < \frac{m(m-1)}{2}$$

entonces al menos dos cajas tienen el mismo número de objetos en ellas.

16. Pruebe que para 5 puntos escogidos dentro de un cuadrado cuyos lados tienen longitud 2, existen dos tal que la distancia que los separa es a lo sumo $\sqrt{2}$.

17. Pruebe que para 5 puntos dentro de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1, hay dos cuya distancia que los separa es a lo sumo $\frac{1}{2}$.

18. Pruebe que para 10 puntos dentro de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1, hay dos cuya distancia que los separa es a lo sumo $\frac{1}{3}$.

19. Determine un entero $m_n$ tal que si $m_n$ puntos se escogen dentro de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1, entonces existen dos puntos cuya distancia que los separa es a lo sumo $\frac{1}{n}$.

20. Determine el número de 12-combinaciones del multiconjunto $S = \{4\cdot a,\ 3\cdot b,\ 4\cdot c,\ 5\cdot d\}$.

34

21. Encuentre el número de enteros entre 1 y 10000 inclusive, los cuales no son divisibles por 4, 6, 7, o 10.

5429

22. Determine el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 20$, las cuales verifican $1 \le x_1 \le 6$, $0 \le x_2 \le 7$, $4 \le x_3 \le 8$ y $2 \le x_4 \le 6$.

96

23. Determine el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ en las cuales ningún número par está en su posición natural.

24024

24. Determine el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ en las cuales hay exactamente 4 enteros en sus posiciones naturales.

630

25. Determine el número de permutaciones del multiconjunto $S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c\}$ tal que *todas* las letras de algún tipo no aparecen consecutivamente.

871