UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO MATEMATICAS
MERIDA

CAPITULO 1

" SISTEMAS NUMERICOS "

MATEMATICA 11

SEMESTRE "A" - 1980

"Después de tí, peregrino, iremos
a las cimas desde dónde, pios y
temblorosos, veremos al Eterno -
Ordenar y contar en el alfabeto
del cielo los fuegos del firmamen-
to, los gérmenes de los abismos"

A.G. Cantor
(1845-1918)

NUMEROS REALES

I. INTRODUCCION

En el presente Capítulo nos dedicaremos a estudiar el conjunto de números con el cuál trabajaremos : el conjunto de los números reales, el cuál será para nosotros - en la mayoría de los casos - nuestro conjunto Universo.

Nos acercaremos a su estudio de una manera intuitiva.* Tampoco dedicaremos espacio al desarrollo histórico de los distintos sistemas numéricos; sinembargo para aquellos que deseen hacerlo se anexan algunos títulos interesantes tales como el libro de Dantzig y el de Ore.

Partiremos del conjunto de los números "que sirven para contar" y luego, iremos ampliando nuestro conjunto hasta obtener un conjunto de números adecuado a nuestras necesidades.

Números Naturales

Con este nombre se designan a los "números de contar" y lo representaremos por :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Los puntos suspensivos indican que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, en dónde sus elementos se suceden en la manera usual : n, $n + 1$, $(n+1)+1$, etc ...

En $\mathbb{N}$ se "definen" dos operaciones que tu conoces: suma y producto. Esto quiere decir lo siguiente :

Si $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$, entonces

(i) $a + b \in \mathbb{N}$

(ii) $a \cdot b \in \mathbb{N}$

La "resta", sinembargo, no siempre está definida en $\mathbb{N}$, así por ejemplo: $7 - 7 \notin \mathbb{N}$ y $2 - 5 \notin \mathbb{N}$.

Puesto que restar es una necesidad muy antigua fué necesario "agregarle" a $\mathbb{N}$ el <u>cero</u> y los <u>negativos</u> de los naturales; es así como se forman los :

Números Enteros :-

Definimos :

$$\mathbb{Z} = \{......, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

---

* Para un estudio formal se puede consultar "Foundations of Analysis" de E. Landau.

La letra Z proviene de la inicial de la palabra <u>Zahl</u> que en alemán quiere decir : número.

Como es de suponer $N \subset Z$ y, por lo tanto, suma y producto están definidas en Z (además de la resta).

A menudo aparecen notaciones tales como Z^+ y Z^- : La primera de ellas se refiere al conjunto de los <u>enteros positivos</u> (N) y la segunda Z^-, denota al conjunto de los <u>enteros negativos</u>. El <u>cero</u> no pertenece ni a Z^+ ni a Z^-.

Una nueva deficiencia en Z llevó a ampliar tal conjunto : <u>en Z no siempre es posible hacer la división</u>; así $8 \div 2$ si tiene solución en Z (que ya sabes: es 4) pero, por ejemplo, $8 \div 5$ o $7 \div 3$ no la tiene. (esto es : $\frac{8}{5} \notin Z$ y $\frac{7}{3} \notin Z$).

<u>Números Racionales</u>

El conjunto de números racionales está formado por aquellos números de la forma $\frac{a}{b}$ en donde <u>a</u> y <u>b</u> son números enteros y <u>b</u> no es el cero.

Así :

$$Q = \{ \frac{a}{b} \mid a \in Z \text{ , } b \in Z \wedge b \neq 0 \}$$

IMPORTANTE : Recordar que la división por cero NO TIENE SENTIDO.

NOTA : La letra Q con que se denota el conjunto de los racionales proviene de la palabra inglesa <u>Quotient</u> : cociente.

Ahora tenemos que $N \subset Z$ y $Z \subset Q$, por lo que en Q quedan definidas : suma, producto, resta y división.

Por lo que hemos hecho, el conjunto de los racionales, Q, tiene como elementos a <u>todos</u> los números que conocemos hasta ahora. Por ejemplo :

+ 8	puede escribirse	como	$\frac{16}{2}$	ó	$\frac{-32}{-4}$	, etc....
- 3	"	"	$\frac{-15}{5}$	ó	$\frac{21}{-7}$	, etc....
0	"	"	$\frac{0}{2}$	ó	$\frac{0}{6}$	, etc....
0,5	"	"	$\frac{1}{2}$	ó	$\frac{3}{6}$	, etc....
$0,\overline{3}$	"	"	$\frac{1}{3}$	ó	$\frac{5}{15}$	, etc....

Observaciones

1. Una fracción, $\frac{a}{b}$, se dice que es irreducible si no existen divisores comunes (distintos de 1) entre el numerador (a) y el denominador (b): en caso contrario se dice que la fracción es reducible.

   Así, por ejemplo :

   $\frac{6}{4}$ es reducible pues 2 es divisor común de 6 y 4.

   $\frac{-3}{2}$ es irreducible ....¿ por qué?

2. Hemos escrito en nuestro ejemplo una barra sobre el tres, esto es: $0,\overline{3}$. Tal notación quiere significar que el tres se repite indefinidamente : 0,3333333 ....

   Así, por ejemplo 2,545454 ... puede escribirse $2,\overline{54}$.
   El dígito - o grupo de dígitos - que esta bajo la barra se llama período del decimal, por lo que decimales como $0,\overline{3}$; $2,\overline{54}$; $0,\overline{6}$; etc se llaman :

   decimales periódicos

   Un hecho importante en el conjunto Q es el siguiente :

   (i) Todo número racional puede escribirse como un decimal racional.

   (ii) Todo decimal periódico es una expresión decimal de un número periódico.

   Problema 1 : Determinar el período de $\frac{1}{4}$.

   Solución : Como se sabe $\frac{1}{4} = 0,25$; es decir : la división es exacta. Así que podemos considerar que $\frac{1}{4} = 0,25000$ ... ó $\frac{1}{4} = 0,25\overline{0}$.
   Un decimal como 0,25 se llama decimal exacto y se omite escribir su período : 0.

Ejercicios

1. Determina cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles y escribelas como tales en caso de ser reducibles.

(a) $\frac{6}{8}$	(c) $\frac{7}{9}$	(e) $\frac{5}{-6}$	(g) $\frac{24}{36}$
(b) $\frac{15}{3}$	(d) $\frac{-3}{5}$	(f) $\frac{12}{18}$	(h) $\frac{-32}{80}$

2. Sean dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{d}{e}$.

Entonces : $\frac{a}{b} = \frac{d}{e} \iff a.e = b.d.$

¿Cuáles de los siguientes pares de números son iguales :

(a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{12}{20}$ (b) $\frac{2}{7}$ y $\frac{6}{21}$ (c) $\frac{5}{20}$ y $\frac{2}{8}$ (d) $\frac{2}{-6}$ y $\frac{-6}{18}$

3. Determina el período de los siguientes números. Usa la notación acordada.

(a) 2,5312531253 .... (c) 0,525... (e) 5,2313131...
(b) 73,2525252 ... (d) 6,6666... (f) 27,283333...

4. Sean $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ dos números racionales con denominadores positivos.

Entonces $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \iff p.s. < r.q.$

Muestra que las siguientes aformaciones son ciertas :

(a) $\frac{14}{29} < \frac{1}{2}$ (b) $\frac{-6}{2} < \frac{-1}{4}$ (c) $\frac{2}{5} < 0{,}45$ (d) $0{,}5 < 0{,}51$

<u>Densidad de Q</u>

El Ejercicio 5 de la sección anterior nos introduce en una característica muy particular de Q.

Decimos que p.ej., $\frac{3}{4}$ está entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ porque es claro que $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ y que $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ lo que usualmente se escribe :

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

En general diremos que : "Dados a, b $\in$ Q existe c $\in$ Q tal que

$$a < c < b$$

que traducido al lenguaje cotidiano nos dice :

"Si tenemos dos números racionales tan próximos como queramos siempre es posible encontrar otro número racional que esté entre ambos."

Por esta razón se dice que <u>Q es denso</u>.

Problema 2 : Encontrar dos números racionales, x e y, tales que : $a < x < y < b$.; dados $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$

Solución : Bastará hacer $y = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$

para tener que $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ ó $a < y < b$.

Se deja como ejercicio encontrar x, tal que $a < x < y$; una vez hecho ésto se tendrá que $a < x < y < b$.

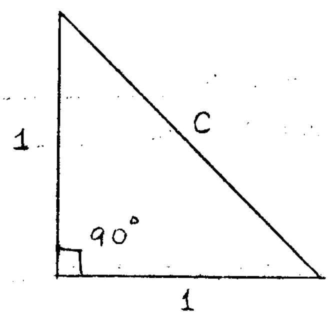
NOTA : Observa que en Z no existe esta "propiedad de densidad". Así, entre 2 y 3 no existe ningún entero.

Números Irracionales

Por mucho tiempo se pensó que los números racionales "agotaban" todos los números posibles : con ellos se podía sumar, restar, multiplicar y dividir, además de tener la propiedad de densidad.

Alrededor del año 410 A.C. un hecho consternó a la comunidad matemática griega cuando la Escuela Pitagórica se encontró ante un problema irresoluble (la solución parecía conducir a una "irracionalidad").

El problema surgió al tratar de encontrar el valor de la hipotenusa c de un triángulo rectángulo cuyos catetos tenían por longitud a la unidad.



El Teorema de Pitágoras decía que:

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

de donde $c = \sqrt{2}$

La "irracionalidad" consistía en que este número $\sqrt{2}$, no podía expresarse como la razón de dos enteros : $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$. *

---

* Una demonstración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ va más allá de los objetivos de nuestro curso, si bien puede encontrarse en varios textos de Analisis.

Este problema - junto con otros similares (como el de la "cuadratura del círculo, " etc) - fué dejado a un lado por los griegos y hubo que esperar hasta que los Hindúes y Arabes se dedicaran a reconocer y usar estos números como tales :

$\sqrt{2}$, π , $\sqrt{3}$, e etc.

Una característica de esos "números irracionales" es que en su representación decimal no hay período, Asi :

$$\sqrt{2} = 1,4142136\ldots$$
$$\pi = 3,14159265358\ldots$$
$$e = 2,718281828459\ldots$$

etc.

Así surgió un nuevo conjunto de números: aquellos que no tienen una representación decimal periódica; y se lo llamó conjunto de números irracionales y se denota por la letra

$$\mathbb{I}$$

Observación

De lo dicho anteriormente, estarás de acuerdo en que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos no comparables; más aún: son disjuntos, es decir :

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Ejército

Completa las afirmaciones siguientes :

a) Si x es un decimal periódico, entonces $x \in$ ____________ .

b) Si x es un decimal no periódico, entonces $x \in$ __________ .

Números Reales :

Llamaremos, a la unión de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{I}$: el conjunto de números reales. Esto es

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Este nuevo conjunto, $\mathbb{R}$, nos servirá para casi todas las necesidades que plantea un curso de cálculo ordinario.

Simbólicamente podemos hacer la siguiente representación :

$\mathbb{R}$: conjunto de números reales

$Q \subset \mathbb{R}$ — Q : conjunto de números racionales

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ — $\mathbb{I}$: conjunto de números irracionales

$Z \subset Q$ — Z : conjunto de números enteros

$N \subset Z$ — N : conjunto de números naturales

NOTA : En $\mathbb{R}$ se definen las operaciones ya conocidas. Para una visión extremadamente sintética de los axiomas y principales Teoremas relativos a las operaciones en $\mathbb{R}$ se remite al lector al Apendice anexo al final del Capítulo. Se supone que son conocidas las reglas elementales del algebra de los números reales, por esta razón no se las incluye aquí.

Ejercicios

1. Identifica los siguientes números como : naturales, enteros, racionales o irracionales. Responde considerando el menor subconjunto al cuál pertenece : $N \subset Z \subset Q \subset R$; $\mathbb{I} \subset R$.

   (a) 2 (c) 0 (e) $2\sqrt{2}$ (g) $\frac{0}{7}$ (i) $0{,}8$

   (b) $-\sqrt{4}$ (d) $-397{,}\overline{52}$ (f) $\frac{7}{0}$ (h) $\sqrt{2}+\pi$ (j) $\frac{\pi}{2}$

2. En los siguientes ejercicios determina cuál es verdadero y cuál es falso. En caso de ser falso, dá la respuesta correcta.

   (a) $S = \{x / x^2 = 1 \wedge x$ es un número par $\} = \emptyset$

   (b) $P = \{x / x^2 = 1 \wedge x$ es un número impar$\} = \emptyset$

   (c) $A = \{x / x^2 + 6x + 9 = 0\} = \{-3\}$

   (d) $\{x / x \in \mathbb{N}\} \cap \{x / x^2 - 1 = 0\} = \emptyset$

   (e) $\mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ (f) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \emptyset$ (g) $\mathbb{R} \subset Z$ (h) $\mathbb{N} \subset Z$

3. Considera que $\mathbb{R}$ es el conjunto Universal y resuelve lo siguiente :

(a) $\mathbb{N} \cap Q =$ (b) $\mathbb{N} \cup Q =$ (c) $(Q \cap \mathbb{I})' =$

(d) $\{0\}' =$ (e) $Q' =$ (d) $\mathbb{I}' =$

Números Complejos

Parecería que con el conjunto de números reales se agotaran todas las posibilidades. (En realidad para nuestro curso - y salvo en la resolución de ciertas ecuaciones polinómicas - nos basta con los números reales).

Sinembargo cerca de 1540 aparece un nuevo tipo de números: los "números complejos". los cuales requirieron de 200 años antes de que su uso fuera corriente.

Tales números aparecieron en la solución de ecuaciones tales como:

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

lo que implicaba $\qquad x^2 = -1$

pero se sabe que para cualquier número real x, su cuadrado siempre es positivo a cero. De modo que la ecuación (1) no tiene solución en R.

Por esa razón fué necesario expandir el conjunto de los números reales para incluir números cuyos cuadrados fueran negativos.

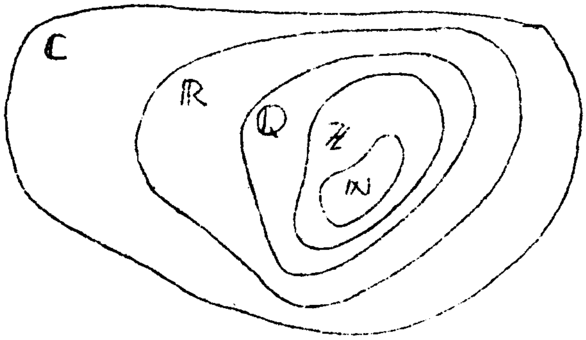
El nuevo conjunto debería retener, tanto como fuera posible, las propiedades usuales de R.
De esta manera se idearon los números complejos y cuyo conjunto se denota por $\mathbb{C}$.

Un número complejo es uno tal que puede escribirse de la forma : a + bi, donde $a,b \in R$ y la letra i representa a la unidad imaginaria; i es tal que $i^2 = -1$.

Así, $1 - 3i \in \mathbb{C}$ y $\sqrt{2} - \pi i \in \mathbb{C}$. Puesto que $a + 0i = a \in \mathbb{C}$, entonces para todo número real a, se tiene que $a \in \mathbb{C}$
Esto es :

$$R \subset \mathbb{C}$$

El siguiente diagrama nos muestra los distintos sistemas de números que hemos descrito.



Por lo que se tiene la siguiente relación : $N \subset Z \subset Q \subset R \subset \mathbb{C}$.

Ejercicios

1. Completa las siguientes afirmaciones :

   (a) Si $U = \mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{N}' =$ ________________.
   (b) Si $U = \mathbb{R}$, entonces $Q' =$ ________________.
   (c) Si $U = \mathbb{C}$, entonces $\mathbb{R}' =$ ________________.

2. Dí cual de las siguientes proposiciones es verdadera y cuál es falsa. Explica por qué si es falsa.

   (a) $3 \varepsilon R$ (c) $2i \varepsilon \mathbb{R}$ (e) $\pi \varepsilon \mathbb{R}$ (g) $0 \varepsilon \mathbb{C}$
   (b) $-3,25 \varepsilon \mathbb{R}$ (d) $4 \varepsilon \mathbb{C}$ (f) $\sqrt{-7} \varepsilon R$ (h) $\sqrt{2} \varepsilon \mathbb{R}$.

Aclaratoria : Volveremos ahora a nuestro conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, para estudiarlo en más detalle. Al final del presente capítulo regresaremos a estudiar mejor el conjunto de los números complejos : $\mathbb{C}$.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO MATEMATICAS
MERIDA

II.- <u>CORRESPONDENCIA BIUNIVOCA Y RECTA REAL</u>

Vistos los distintos conjuntos de números que usaremos, volvamos a $\mathbb{R}$. Haremos un estudio más detallado de algunas de sus propiedades; para lo cual, como luego en el estudio de $\mathbb{R}^2$, será útil tener una representación geométrica de $\mathbb{R}$, como el conjunto de puntos de una línea recta.

**<u>DEFINICION 1.1.</u> (Correspondencia Biunívoca).

Dos conjuntos, S y T, se dice que están en <u>correspondencia biunívoca</u> (o uno-a-uno) si y solo sí a cada elemento de S le corresponde uno-y solo uno- elemento de T; y a cada elemento de T le corresponde uno- y solo uno- elemento de S.

<u>PROBLEMA 3</u>

Dados los conjuntos $S = \{a, b, c\}$; $T = \{1, 3, 5\}$ y $V = \{j, k, l, m\}$

Poner S y T en una correspondencia biunívoca. ¿Se puede hacer lo mismo entre S y V ? ¿Porqué?.

<u>SOLUCION:</u>

Hay varias maneras en que podemos hacer corresponder S y T biunívocamente; una de ellas puede ser:

$$\begin{array}{ccccc} S & = & \{a, & b, & c\} \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ T & = & \{1, & 3, & 5\} \end{array}$$

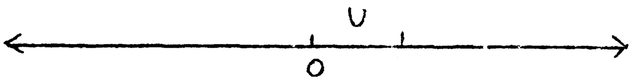
Es decir:

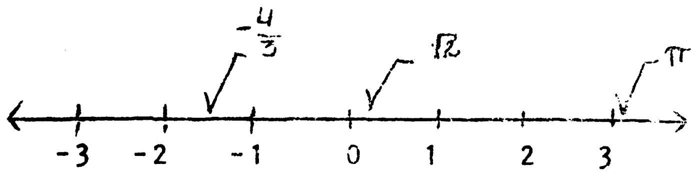
1 lo asociamos con a (y viceversa)
3 " " " b (y viceversa)
5 " " " c (y viceversa)

Es claro que, por la Def. 1.1., S y V no pueden ponerse en tal correspondencia pues tienen distinto número de elementos

La idea de correspondencia biunívoca tiene especial importancia para construir "la recta real" pues asociaremos con cada número real un punto -y solo uno- de la recta, y a cada punto de la recta le asociaremos un único número real.

Comenzaremos tomando sobre una línea recta un punto cualquiera y lo considereremos el orígen: "0". Luego seleccionamos una unidad arbitraria y marcamos, sobre la recta, los puntos correspondientes al conjunto de los números enteros, teniendo en cuenta colocar los enteros positivos a la derecha del cero y los enteros negativos a la izquierda del cero. Ahora, en el espacio restante se colocan los números racionales (que son fracciones de unidades).





Como sabemos, Q es denso; sinembargo quedan "huecos" en la recta que deben ser "llenados" por los irracionales (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e, $-\pi/2$, etc. . .). Ahora nuestra recta está completa.

La correspondencia fundamental entre el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, y el conjunto de puntos de la recta es la siguiente:

(i) A cada número real (racional o irracional) le corresponde uno, y sólo un, punto de la recta, y

(ii) Cada punto de la recta representa un único número real

OBSERVACIONES

*Al conjunto de números reales a la derecha del cero se lo lla

*De igual manera, $\mathbb{R}^-$ representa al <u>conjunto de los números reales negativos</u>: aquellos que están a la izquierda del cero.

*Al cero lo consideraremos ni positivo ni negativo.

* $\mathbb{R}_0^-$ representa al conjunto de los números reales <u>no positivos</u>.

$\mathbb{R}_0^+$ representa al conjunto de los números reales no <u>negativos</u>.

EJERCICIO

Representa sobre la recta real los siguientes números. Establece la relación de pertenencia respectiva. ($x \in \mathbb{Q}$ ó $x \in \mathbb{I}$).

a) 2.5 c) $\frac{11}{5}$ e) 3π g) $-\frac{3}{10}$ i) $3\sqrt{2}$

b) $-\frac{3}{5}$ d) $-\frac{8}{7}$ f) $\frac{17}{4}$ h) $\frac{3\pi}{2}$ j) e

III.- ORDEN EN $\mathbb{R}$. DESIGUALDADES.

Sabemos que, dados dos números reales cualesquiera, siempre es posible compararlos, esto es, podemos establecer una "relación de orden" entre ellos. Así, si nos dan dos números distintos entonces, uno debe ser "más grande" que el otro. Esto se establece en lo siguiente:

LEY DE TRICOTOMIA

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, una y sólo una, de las siguientes relaciones es cierta.

<u>a</u> es mayor que <u>b</u>, en cuyo caso escribimos $a > b$

<u>a</u> es menor que <u>b</u>, " " " " $a < b$

<u>a</u> es igual que <u>b</u>, " " " $a = b$

NOTA: Podemos decir que si $a > b$ entonces <u>a está a la derecha de b</u>. Similarmente, si $a < b$, <u>a está a la izquierda de b</u>. en la recta real.

A continuación, daremos una definición rigurosa de la relación de orden " > " y algunas de sus propiedades.

DEFINICION 1.2.

Sean a y b dos números reales y distintos. Decimos que "a es mayor que b" (o que b es menor que a) y se denota "a > b" si y solo sí a - b es un número positivo.

Esto es:

$$a > b \iff a - b \in \mathbb{R}^+ \qquad (\text{ó } a - b > 0) \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 4. Verificar que $4 > -2$

SOLUCION: aplicando la Def. 1.2:

$$4 > -2 \iff 4 - (-2) \in \mathbb{R}^+$$

es decir, si: $4 - (-2) > 0$

Lo cual es cierto pues $4 - (-2) = 4+2 = 6 > 2$

Luego: $4 > -2$.

Verifica que $-6 < -2$!!

NOTA: Diremos que : $a < b \iff b > a$.

EJERCICIOS.

En los siguientes pares de números reales llena el espacio en blanco con el signo correspondiente a la relación de orden que se establece.

Utiliza para ello la Definición 1.2. y la ley de Tricotomía.

a) $4 + 3$ ——— $\sqrt{2}$

b) $-\pi$ ——— $-4,83$

c) 0 ——— -5

d) 3^2 ——— 2^3

e) [illegible]^0 ——— 1

f) $\sqrt{2}$ ——— $1,41$

g) $3,1416$ ——— π

h) 3^2+4^2 ——— 5^2

DEFINICION 1.3.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$a \geq b \iff a > b \vee a = b$$

Similarmente:

$$a \leq b \iff a < b \vee a = b$$

Así, por ejemplo, es cierto que:

$2 \leq 2$ pues se cumple: $2 = 2$

$2 \geq 2$ " " " : $2 = 2$

$2 \leq 5$ " " " : $2 < 5$

EJERCICIOS.

1.- Decir, y explicar porqué, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

a) $\pi \leq \sqrt{9}$ c) $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{9}$ e) $3 \geq 3^{-1}$ g) $\frac{\pi}{2} = 90$

b) $\sqrt{2} \leq \sqrt{2}$ d) $4 \geq 0$ f) $2^3 \geq 2^{-3}$ h) $\pi = 3{,}1416$.

2.- Escribir las negaciones de las relaciones dadas:

a) "Mayor que" c) "igual que" e) "menor o igual que"

b) "Menor que" d) "mayor o igual que"

ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA RELACION DE ORDEN

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Si $a > b \wedge b > c$ entonces $a > c$ (transitiva)
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ (aditiva)
3. Si $a > b \wedge c > 0$, entonces $ac > bc$ (multiplicación por un real positivo)
4. Si $a > b \wedge c < 0$, entonces $ac < bc$ (multiplicación por un real negativo)

<u>IMPORTANTE</u>: En una desigualdad el sentido de la misma se cambia si se multiplica ambos términos por un número negativo.

<u>Por EJEMPLO</u>: $8 > 2$, si multiplicamos por -3

nos queda: $(-3)\,8 = -24 < -6 = (-3)2$

<u>EJERCICIOS</u>

1. Completa la implicación llenando el espacio en blanco:

a) $2 < 5 \wedge 5 < 7 \Longrightarrow 2$ ______ 7

b) $\sqrt{2} < \sqrt{7} \wedge \sqrt{7} < \sqrt{8} \Longrightarrow$ ______

c) $5 \leq x \wedge x \leq 10 \Longrightarrow$ ______

d) $a > 6 \Longrightarrow a - 4$ ______ 2

e) $x + 5 < 7 \Longrightarrow x$ ______ 2

f) $x > 3 \Longrightarrow 2x$ ______ 6

g) $-x < -5 \Longrightarrow x$ ______ 5

h) $1 - x < 2 \Longrightarrow x$ ______ 1

2. Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explica en cada caso el por qué. (usa para ello las Definiciones dadas y/o un contraejemplo).

a) $3 \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1/2 \leq 3$

b) $a \geq -b \Longleftrightarrow -b \geq a$

c) $-a \leq -c \Longleftrightarrow a \geq c$

d) $x \geq y \Longleftrightarrow x > y$

e) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Longleftrightarrow a < b \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$

f) $0 < a < 1 \Longleftrightarrow a^2 \geq a$

g) $a > 1 \Longleftrightarrow a^2 \leq a$

IV. INECUACIONES Una expresión del tipo ...

lo que se conoce como una ecuación, la cual se satisface para determinado(s) valor(es) de x.

En nuestro caso: si $x = \frac{b}{a}$.

Consideraremos aquí desigualdades del tipo:

$$ax < b \quad ; \quad cx \geq d, \text{ etc. . .}$$

Las cuales se satisfacen para ciertos valores de x.

Tal desigualdad considerada con respecto a los valores que adopta x se llama inecuación.

PROBLEMA 5.

Sea la inecuación $P(x)$: $X < \pi$

a) Dar tres números reales que satisfacen $P(x)$.

b) Dar tres números reales que no satisfacen $P(x)$.

SOLUCION:

a) 1; - 10; 3

b) 8; 25; 2π

¿Puedes dar otros ejemplos en (a) y en (b)?

PROBLEMA 6.

Sea la inecuación $P(x)$: $x - 3 < 2$ ¿Para qué valores de x ($x \in \mathbb{R}$) se cumple la desigualdad?.

SOLUCION:

$x - 3 < 2 \Longrightarrow x - 3 + 3 < 2 + 3$ (Por Propiedad 2)

es decir: $x < 5$.

Por lo tanto $P(x)$ es verdad para todo x, $x < 5$

Usando la notación de conjuntos, el conjunto solución será:

$$S = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x < 5 \}$$

o más corrientemente (si entendemos que x es un número real)

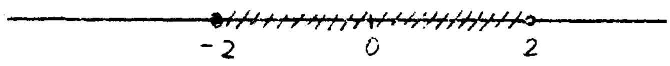
$$S = \{x \,/\, x < 5\}$$

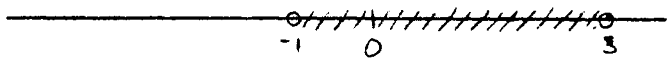
PROBLEMA 7. Representar sobre la recta real los conjuntos de números que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $-2 \leq x \leq 2$ (se lee: "x es mayor o igual que -2 y menor o igual que 2").

b) $-1 < x < 3$.

SOLUCION

a) 

b) 

NOTA: En (a) los círculos sombreados en los extremos, -2 y 2, significan que -2 y 2 pertenecen al conjunto deseado.
En (b) los círculos vacíos, en -1 y 3, indican que -1 y 3 no pertenecen al conjunto deseado.

PROBLEMA 8.

a) Resolver la desigualdad

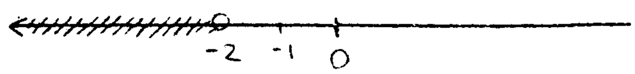
$3x - 4 < x - 8$

SOLUCION:

$3x - 4 < x - 8 \Longrightarrow 2x < -4$ ó $x < -2$ (multiplicando por $\frac{1}{2}$ en ambos miembros)

Así que $S = \{x \mid x < -2\}$

Geometricamente esto se representa así:

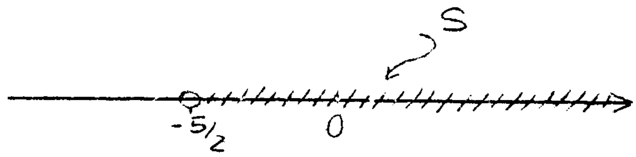


b) Resolver: $x - 7 < 3x - 2$

SOLUCION: $x - 7 < 3x - 2 \Longrightarrow -2x < 5$ ahora multiplicando por $-\frac{1}{2}$: $x > -\frac{5}{2}$.

NOTA: Hemos multiplicado ambos miembros de la desigualdad por un número negativo por lo tanto EL SENTIDO DE LA DESIGUALDAD CAMBIA.

Así que $S = \{ x / \ x > -\frac{5}{2}$ geometricamente:



c) Resolver: $(x - 3)(x - 7) < 0$

SOLUCION:

Sabemos que el producto de dos factores es negativo si y solo si un factor es positivo y el otro es negativo. Por lo tanto tenemos dos posibles soluciones:

$(x - 3) < 0$ y $(x - 7) > 0$ ó $(x - 3) > 0$ y $(x - 7) < 0$

CASO 1.: $(x - 3) < 0$ y $(x - 7) > 0$

Aquí tenemos que debe ser: $x < 3$ y $x > 7$, y puesto que estas condiciones deben satisfacerse simultáneamente para x tendremos la intersección de dos conjuntos (¿Por qué?)

$$\{x \mid x < 3\} \cap \{x \mid x > 7\} = \emptyset$$

CASO 2.: $(x - 3) > 0$ y $(x - 7) < 0$

Por un razonamiento análogo al anterior tenemos que:

$$x > 3 \text{ y } x < 7$$

esto es:

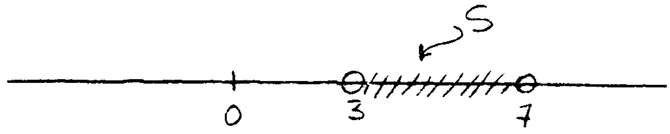
$$\{x \mid x > 3\} \cap \{x \mid x < 7\} = \{x \mid 3 < x < 7\}$$

La solución del problema vendrá de la unión de estos dos resultados (caso 1 y caso 2). (¿Por qué?)

Tendremos:

$$S = \emptyset \cup \{x \mid 3 < x < 7\}$$

Geométricamente:



EJERCICIOS

Resolver las siguientes inecuaciones. Escribe el conjunto solución y represéntalo sobre la recta real.

a) $2x > 5$

b) $2 - x > 8$

c) $2x + 3 \leq 5 + x$

d) $\dfrac{x+1}{3} \geq -5$

e) $\dfrac{2x+3}{-2} \geq 6$

V. SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}$: INTERVALOS. OPERACIONES CONJUNTISTAS CON INTERVALOS.

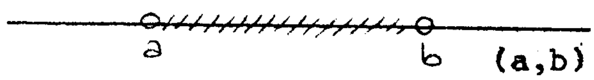
Como se pudo apreciar en el último problema (# 8c), resolver inecuaciones en $\mathbb{R}$ algunas veces puede resultar engorroso si se usa la notación conjuntista. Por eso presentaremos una manera abreviada de representar ciertos conjuntos de números reales.

*DEFINICION 1.4. (intervalos)

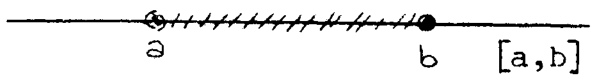
Sea $a < b$ y $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, entonces podemos escribir:

REPRESENTACION:

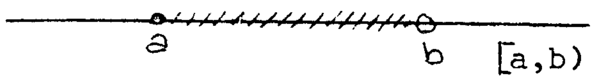
1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$;



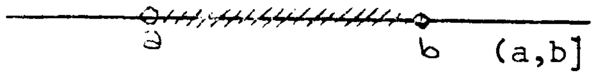
2. $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;



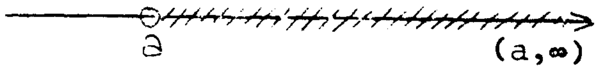
3. $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;



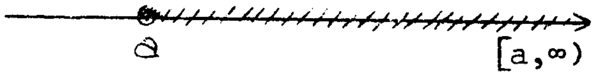
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;



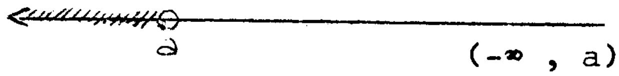
5. $(a,\infty) = \{x \mid a < x\}$;



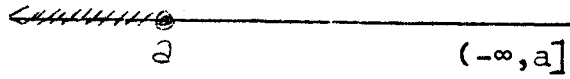
6. $[a,\infty) = \{x \mid a \leq x\}$;



7. $(-\infty,a) = \{x \mid x < a\}$;

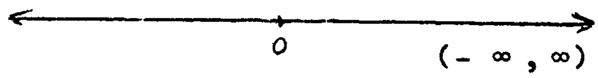


8. $(-\infty,a] = \{x \mid x \leq a\}$;



9. $(-\infty,\infty) = \{x \mid x$ es un número real$\}$

$= \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$;



OBSERVACIONES

1.- Los números a y b se llaman extremos del intervalo.

Un paréntesis -(;)- indica que el extremo no pertenece al intervalo.

Un corchete -[;]- indica que el extremo pertenece al intervalo.

Los intervalos: (a,b) ; (a, ∞) ; $(-\infty, a)$ y $(-\infty, \infty)$ se llaman intervalos abiertos

Los intervalos: $(a,b]$; $[a , b)$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, a]$ se llaman intervalos semi-abiertos (ó semi-cerrados)

El intervalo $[a , b]$ se llama intervalo cerrado.

2.- Los símbolos ∞, $-\infty$ no representan números; son solamente notaciones abreviadas para intervalos dados.

Se leen respectivamente: "más infinito" y "menos infinito"

EJERCICIOS

conjuntos:

a) $A = \{x \mid -5x \leq 3\}$ d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{x \mid x \geq 2\}$ e) $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}^+\}$

c) $C = \{x \mid x < -3/4\}$ f) $F = \{x \mid x \in \mathbb{R}^+_0\}$

2.- Escribe, usando la notación conjuntista, los siguientes intervalos:

a) $(0, 2]$ c) $[-5, 4]$

b) $[2, \infty)$ d) $(-1/3, 5)$

3.- Representar sobre la recta real los siguientes conjuntos:

a) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ c) $C = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

b) $B = [2, 3]$ d) $D = \{x \mid x \geq 0\}$

e) $E = [2, +\infty)$ f) $F = [3, 1]$!! *

4.- Escribe por extensión el conjunto de los números enteros que pertenecen a cada uno de los intervalos dados:

a) $(-2, 4)$ b) $[-2, 4)$ c) $(-2, 4]$ d) $[-2, 4]$

5.- ¿Será cierto que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = [1, 7]$? Explica.

OPERACIONES CONJUNTISTAS CON INTERVALOS

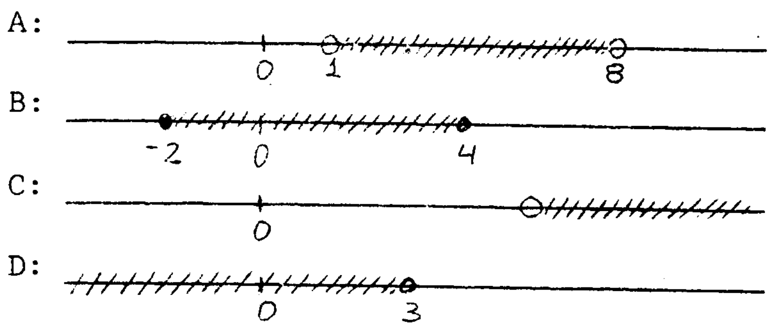
Puesto que los intervalos son conjuntos, podemos efectuar con ellos las operaciones de unión, intersección, etc...
Veamos un ejemplo.

PROBLEMA 9. Sean los intervalos : $A = (1, 8)$; $B = [-2, 4]$;
$C = (5, \infty)$; $D = (-\infty, 3]$

Determinar los siguientes conjuntos y expresarlos como intervalos o unión de intervalos.

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $(B \cup D) \cap A$ d) A'

<u>SOLUCION:</u> las gráficas de A, B, C y D son:



Entonces:

a) $A \cup B = (1,8) \cap [-2,4] = [-2,8)$

b) $A \cap B = (1,8) \cap [-2,4] = (1, 4]$

c) $(B \cup D) \cap A$; para ello hacemos primero

$B \cup D = [-2,4] \cup (-\infty, 3] = (-\infty, 4]$ y luego

$(B \cup D) \cap A = (-\infty, 4] \cap (1,8) = (1,4]$

d) $A' = \mathbb{R} - A = \mathbb{R} - (1, 8) = (-\infty, \infty) - (1,8) =$

$= (-\infty, 1] \cup [8, \infty)$

SUGERENCIA: Dibuja la gráfica en cada caso.

<u>EJERCICIOS</u>

Efectúa las operaciones indicadas y dibuja el gráfico correspondiente al conjunto de puntos que representa:

a) $(2,5] \cap [3,7]$ c) $(-\infty, -5)'$

b) $(= \infty, 1) \cap [-1, a]$ d) $(2,8) \cup [-6, 2]$

Ahora vamos a resolver algunas inecuaciones utilizando lo que hemos aprendido para presentar el resultado con la notación de intervalos.

PROBLEMA 10 Encontrar el conjutno de números reales x, que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$2x + 5 < x + 10$$

SOLUCION:

$$2x + 5 < x + 10 \implies 2x < x + 5$$

luego $2x - x < 5$

esto es $x < 5$

Así que $S = (-\infty, 5)$

PROBLEMA 11. Resolver la siguiente desigualdad compuesta.

$$2 \leq 5x - 3 < 7$$

SOLUCION.

Agregando 3 a cada miembro de la desigualdad tenemos:

$$2 + 3 \leq 5x - 3 + 3 < 7 + 3$$

Esto es:

$$5 \leq 5x < 10$$

multiplicamos ahora cada miembro de la desigualdad por $\frac{1}{5}$

nos queda que:

$$1 \leq x < 2$$

Así, que $S = [1, 2)$.

PROBLEMA 12. Resolver la desigualdad:

$$(x + 2)(x - 1) > 0$$

SOLUCION. Esta desigualdad se satisface si ambos factores tienen igual signo, es decir si:

$(x + 2) > 0$ y $(x - 1) > 0$ ó $(x + 2) < 0$ y $(x - 1) < 0$

Entonces tenemos dos casos.

<u>CASO 1</u>: $x + 2 > 0$ y $x - 1 > 0$

Aquí vemos que : $x > -2$ y $x > 1$ (*)

Ambas desigualdades en (*) se mantienen si x está en el intervalo $(1, \infty)$. Observa que en realidad estamos encontrando la <u>intersección</u>:

$$(-2, \infty) \cap (1, \infty) = (1, \infty)$$

<u>CASO 2</u>: $x + 2 < 0$ y $x - 1 < 0$.

En este caso tenemos:

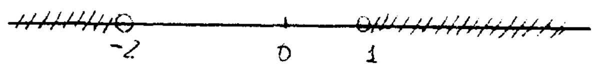
$x < -2$ y $x < 1$, ambas desigualdades se mantienen en el intervalo:

$(-\infty, -2)$ ¿Por qué?

La solución vendrá de la <u>unión</u> de los resultados de los dos casos:

$S = (1, \infty) \cup (-\infty, -2)$ (¿Es éste un intervalo?)

su representación es:



<u>PROBLEMA 13.</u> Resolver la desigualdad:

$$\frac{x}{x-4} > 5 \quad , \quad x \neq 4$$

<u>SOLUCION</u> Sea (*) la desigualdad dada.

Para resolverla deseamos multiplicar ambos lados de (*) por $(x - 4)$, sinembargo debemos notar que el sentido de la desigualdad cambia si $x - 4$ es negativo y se mantiene si $x - 4$ es positivo. Así que debemos considerar dos casos:

$$(x - 4) > 0 \quad y \quad (x - 4) < 0$$

CASO 1: $x - 4 > 0$, es decir : $\underline{x < 4}$

Multiplicando ambos lados de (*) por $x - 4$ tenemos:

$$x > 5\ (x - 4)$$

o $\quad x > 5\ x - 20$, de donde

$$-4x > -20 \quad y$$

$\underline{x < 5}$ (justifica cada paso!)

Así que para el caso 1, tenemos como solución al conjunto de todos los números reales tales que:

$$x > 4 \quad y \quad x < 5$$

es decir: $4 < x < 5$

luego $S_1 = (4,5)$

CASO 2: $x - 4 < 0$, es decir $\underline{x < 4}$

De manera similar de (*) tenemos que:

$x < 5(x - 4)$ ¿por qué cambia el sentido la desigualdad?.

o $\quad x < 5x - 20$

$-4x < -20$, de donde

$\underline{x > 5}$

La solución para el caso 2 estará representada por el conjunto de números reales que satisfacen:

$$x < 4 \quad y \quad x > 5$$

Es claro que no existe ningún número que satisface tales condiciones simultáneamente así que:

$$S_2 = \phi$$

De los casos 1 y 2 conluimos que el conjunto solución es:

$S = S_1 \cup S_2 = (4,5) \cup \phi$. Luego:

$$\boxed{S = (4,5)}$$

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, resuelva la desigualdad y represente el conjunto solución, S, con la notación de intervalos Efectúe una representación gráfica de S.

1.- a) $2x - 3 < 5$ c) $3x - 2 \geq -2x + 10$

b) $7x - 4 < 4x + 11$ d) $-2x > 6$

2. a) $(x - 3)(x + 5) < 0$ c) $7 - \frac{3}{x} < 12 \ (x \neq 0)$

b) $(x - 2)(x + 3) \geq 14$ d) $\frac{x}{x - 1} \leq -2 \ (x \neq 1)$

VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

El "valor absoluto" de x, denotado por $|x|$ es un concepto importante muy usado en el estudio de desigualdades.

DEFINICION 1.5.

Sea x un número real, entonces, el valor absoluto de x es:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Aclaremos la definición mediante un ejemplo.

PROBLEMA 14. Encontrar los siguientes valores absolutos:

a) $|7|$; b) $|0|$; c) $|-2|$

SOLUCIÓN:

a) $|7| = 7$ puesto que $x = 7 > 0$ (ver definición). Es decir: el valor absoluto de un número positivo es positivo.

b) $|0| = 0$. El valor absoluto de cero es cero.

c) $|-2| = -(-2) = 2$. El valor absoluto de un número negativo es un número positivo.

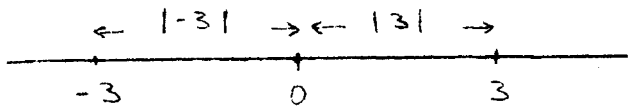
OBSERVACIONES

(i) El valor absoluto de un número es siempre positivo con una excepción: el valor absoluto del cero es cero.

(ii) Ahora sabemos que, p.ej, $|3| = |-3| = 3$.

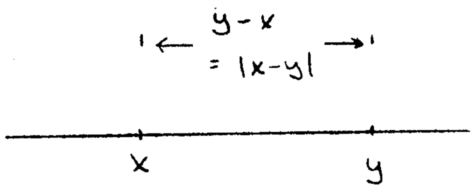
Si obervamos la recta real, se aprecia que 3 y -3 son equidistantes del cero.

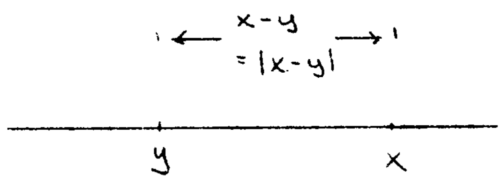
Así que, geométricamente el valor absoluto de un número x es su distancia desde el cero, sin importar su dirección.



(iii) En general $|x - y|$ denota la distancia entre x e y sim importar su dirección. Entonces será igual la distancia de x a y que de y a x; esto es:

$$|x - y| = |y - x| \quad \text{(¿por qué?)}$$



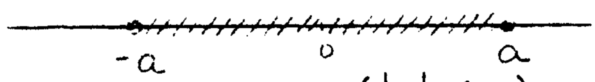


Algunas propiedades sobre el valor absoluto y que deben ser recordadas son:

PROPIEDADES. Sean $x, y \in \mathbb{R}$

1) Si $a > 0$, entonces $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

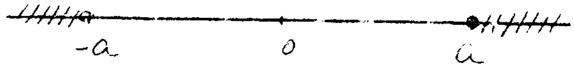
Graficamente:



$(|x| \leq a)$

2) Si $a > 0$, entonces $|x| \geq a \iff x \geq a$ ó $x \leq -a$.

graficamente:



$(|x| \geq a)$

3) $|x| = |y| \iff x = y$ ó $x = -y$.

4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (en consecuencia: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$. $y \neq 0$)

Estas cuatro propiedades se ejemplificarán en la resolución de las siguientes igualdades y desigualdades:

PROBLEMA 14 Resolver las siguientes igualdades:

a) $|x - 3| = 4$; B) $|2x - 3| = 5$ c) $|2x - 1| = |5x + 9|$

SOLUCION:

A) $|x - 3| = 4$. Para encontrar el conjunto solución, S, debemos considerar dos casos:

$x - 3 \geq 0$ y $x - 3 < 0$

CASO 1.

$$x - 3 \geq 0 \implies |x - 3| = x - 3$$

luego $x - 3 = 4$

y $\underline{x = 7}$.

CASO 2.

$$x - 3 < 0 \implies |x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$$

luego $-x + 3 = 4$

y $\underline{x = -1}$

$\therefore$ $S = \{-1, 7\}$

B) $|2x - 3| = 5$.

Nuevamente se consideran dos casos:

$$2x - 3 \geq 0 \quad y \quad 2x - 3 < 0$$

Así: $|2x - 3| = 2x - 3$ ó $|2x - 3| = -2x + 3$

lo que nos deja las dos ecuaciones:

$$2x - 3 = 5 \qquad ó \qquad -2x + 3 = 5$$

$$2x = 8 \qquad\qquad -2x = 2$$

$$x = 4 \qquad\qquad x = -1$$

$$\therefore \quad S = \{-1, 4\}$$

c) $|2x - 1| = |5x + a|$ Usamos la propiedad 3 que nos dice

que:

$$2x - 1 = 5x + a \quad ó \quad 2x - 1 = -(5x + 9)$$

luego $-3x = 10$ $\qquad$ $7x = -8$

$$x = -\frac{10}{3} \qquad\qquad x = -\frac{8}{7}$$

$$S = \left\{ -\frac{10}{3}, -\frac{8}{7} \right\}$$

PROBLEMA 15. Resolver las siguientes desigualdades:

A) $|x| \leq 2$; B) $|x - 2| \leq 1$; C) $|x| \geq 2$ D) $|x - 3| > 1$

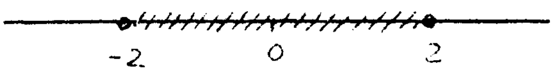
SOLUCION.-

a) $|x| \leq 2$. Aplicando la propiedad 1, tenemos que:

$$|x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2.$$

esto es: $S = [-2, 2]$

Graficamente:

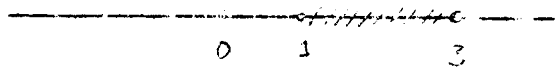


b) $|x - 2| \leq 1$. Nuevamente, $|x - 2| \leq 1 \iff -1 \leq x - 2 \leq 1$

de donde, $1 \leq x \leq 3$

Asi, $S = [1,3]$

Graficamente:

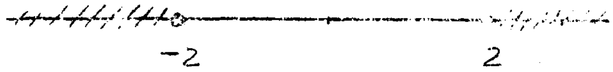


c) $|x| \geq 2$. De la propiedad 2 sabemos que

$|x| \geq 2 \iff x \geq 2$ ó $x \leq -2$

Por lo tanto $S = (-\infty, -2] \quad [2, +\infty)$

Graficamente:



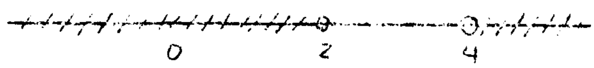
d) $|x - 3| > 1$.

Como en (c), $|x - 3| > 1 \iff x - 3 > 1$ ó $x - 3 < -1$

luego $x > 4$ ó $x < 2$

Es decir $S = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

Graficamente:



Observa que en este último ejemplo la desigualdad es "estricta" y los extremos, 2 y 4, no pertenecen a S.

Ahora, es posible representar ciertas desigualdades como valor absoluto y viceversa, esto lo veremos mediante el siguiente ejemplo:

*<u>PROBLEMA 16</u>. Escribir proposiciones equivalentes para:

(A) $|x - 2| \leq 3$

(B) $|x + 4| < 5$

(C) $6 \leq x \leq 14$

SOLUCION. (A) $|x - 2| \leq 3 \iff -3 \leq x - 2 \leq 3$

$$\iff -1 \leq x \leq 5.$$

(B) $|x + 4| < 5$ se puede escribir como:

$$|x - (-4)| < 5 \iff -5 < x - (-4) < 5$$

$$\iff -5-4 < x < 5 - 4$$

$$\iff -9 < x < 1.$$

(C) $6 \leq x \leq 14$ esta desigualdad la podemos escribir como: $10 - 4 \leq x \leq 10 + 4$

ahora : $-4 \leq x - 10 \leq 4$

$$\iff |x - 10| \leq 4.$$

*PROBLEMA 17. RESOLVER:

$$\left|\frac{2 - 3x}{x + 1}\right| \leq 5 \quad , \quad (x \neq -1)$$

SOLUCION.-

Por la propiedad 1 tenemos que:

$$\left|\frac{2 - 3x}{x + 1}\right| \leq 5 \iff -5 \leq \frac{2 - 3x}{x + 1} \leq 5 \qquad (1)$$

Para resolver (1) necesitamos multiplicar por $x + 1$ cada miembro de esta desigualdad doble. Como ya hemos visto el sentido de la desigualdad dependerá del signo de $x + 1$; así que tenemos que considerar dos casos:

$$x + 1 > 0 \quad y \quad x + 1 < 0.$$

CASO 1. $x + 1 > 0$, es decir $x > -1$

De (1) : $-5(x + 1) \leq 2 - 3x \leq 5(x + 1)$ es decir

$$-5x - 5 \leq 2 - 3x \leq 5x + 5$$

De manera que deben satisfacerse simultáneamente dos desigualdades:

(i) $-5x - 5 \leq 2 - 3x \iff x \geq -\frac{7}{2}$

(ii) $2 - 3x \leq 5x + 5 \iff x \geq -\frac{3}{8}$

Ahora tenemos las condiciones de que, en el caso 1 se deben satisfacer, a la vez;

$$x > -1 \; ; \quad x \geq -\frac{7}{2} \; ; \quad x \geq -\frac{3}{8}$$

Esto es: $x \in (-1, +\infty) \cap [-\frac{7}{2}, +\infty) \cap [-\frac{3}{8}, +\infty)$

luego $\boxed{S_1 = [-\frac{3}{8}, +\infty)}$

CASO 2. $x + 1 < 0$, es decir $x < -1$

Ahora el sentido de la desigualdad (1) cambia, esto es:

$$-5x - 5 \geq 2 - 3x \geq 5x + 5$$

entonces: $\begin{cases} -5x - 5 \geq 2 - 3x \iff x \leq -7/2 \\ \\ 2 - 3x \geq 5x + 5 \iff x \leq -3/8 \end{cases}$

De manera que (1) se mantiene cuando simultáneamente:

$$x < -1 \; ; \quad x \leq -7/2 \; ; \quad x \leq -3/8$$

Es decir, (1) es cierto para todo x tal que:

$$x \in (-\infty, -1) \cap (-\infty, -7/2] \cap (-\infty, -3/8]$$

luego $\boxed{S_2 = (-\infty, -7/2]}$

Combinando los dos resultados S_1 y S_2 obtenemos la solución del problema:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -7/2] \cup [-3/8, +\infty)$$

EJERCICIOS.

1.- Encuentra el conju nto solución (en forma de intervalos o unión de intervalos). Representarlo sobre la recta real.

a) $|x| \leq 4$ (e) $|x - 2| > 3$

b) $|3x + 4| \leq 5$ (f) $|2x + 1| > 5$

c) $|\frac{1}{2} x - 3| < 7$ (g) $\frac{|x - 2|}{-5} \leq -1$

d) $|x| \geq -2$ (h) $\left|\frac{5x - 3}{-2}\right| > 8$

2.- Escribir como valor absoluto las siguientes desigualdades:

a) $-3 \leq x \leq 3$ (d) $-1 < x + 3 < 3$

b) $-2 < x + 2 < 2$ (e) $x < -4$ o $x > 4$

c) $-1 \leq x - 4 \leq 1$ (f) $x \leq -\frac{7}{5}$ o $x \geq \frac{7}{5}$

3.- Resolver y representar sobre la recta real:

a) $|7 - 3x| \geq |5x|$; $S = |-7/2, 7/8|$

b) $|3 - 4x| \leq |6x + 1|$; $S = (-\infty, -2] \cup [1/5, +\infty)$

NUMEROS COMPLEJOS.

Ya al comienzo de este Capítulo habíamos introducido la idea de "números complejos"; vamos aquí a "definir" el conjunto de tales números y a revisar brevemente algunas de sus propiedades.

**DEFINICION 1.5.

El conjunto $\mathbb{C}$ de los **números complejos** consiste de aquellos números que pueden escribirse de la forma (a+bi), dónde a y b son números reales e $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \quad \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

NOTAS * Si z $\mathbb{C}$ escribiremos que $z = a + bi$

* El símbolo a + bi es llamado forma standard de un número complejo; de igual manera lo es a + ib la que algunas veces resulta útil para evitar confusiones Ej: $3 + i\sqrt{2}$ etc.

* El número real a se llama componente real de z y se denota por: $a = Re(z)$.

* El número real b se llama componente imaginaria de Z y se denota por: $b = Im(z)$.

PROBLEMA 18

Determinar las partes reales e imaginarias de los números complejos siguientes:

a) $Z_1 = 3 + 2i$ (c) $Z_3 = -\frac{1}{2}i$

b) $Z_2 = \sqrt{2} - i$ (d) $Z_4 = \sqrt{2}$

SOLUCION.

a) $Re(Z_1) = 3$, $Im(Z_1) = 2$

b) $Re(Z_2) = \sqrt{2}$, $Im(Z_2) = -1$

c) $Re(Z_3) = 0$, $Im(Z_3) = -1/2$

d) $Re(Z_4) = \sqrt{2}$, $Im(Z_4) = 0$

Del Problema anterior podemos extraer las siguientes observaciones:

1) Un número complejo como el de la parte (c) donde $Re(Z_3)$ es cero, se lo denomina imaginario puro.

Esto es: Z es un imaginario puro si $Z = 0 + bi = bi$

Ejemplo: $2i$; $-\pi i$; $-\frac{3}{4}i$; $i\sqrt{3}$; etc. . .

2) Un número real es un número complejo cuya parte imaginaria - Im(Z) - es cero, tal como en la parte (d).

Esto es: $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $x = x + 0i$

de manera que resulta que:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

EJERCICIOS

1.- Encuentra el valor de las siguientes potencias de la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1}$).

(a) i^2 (c) i^4 (e) i^{-3} (g) i^{27} (i) i^{4n+2}, $n \in Z$

(b) i^3 (d) i^5 (f) i^{10} (h) i^{4n}, $n \in Z$ (j) i^{19}, (k) i^{65}

2.- En los siguientes números complejos determina la parte real y la parte imaginaria.

a) $-i$ c) 0 e) π g) $1 - i\sqrt{2}$

b) 5 d) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3}i$ f) $\pi - i$ h) $\sqrt{3} - i\sqrt{7}$

Asociado con cada número complejo $z = a + bi$ existe otro número complejo: su conjugado, denotado por $\overline{Z} = a - bi$.

PROBLEMA 19. Dados los siguientes números complejos; encontrar sus conjugados.

a) $Z_1 = 3 + i\sqrt{2}$ c) $Z_3 = -\frac{i}{3}$

b) $Z_2 = \sqrt{2} - 1$ d) $Z_4 = 2$

SOLUCION: a) $\overline{Z}_1 = 3 - i\sqrt{2}$ c) $\overline{Z}_3 = +\frac{i}{3}$

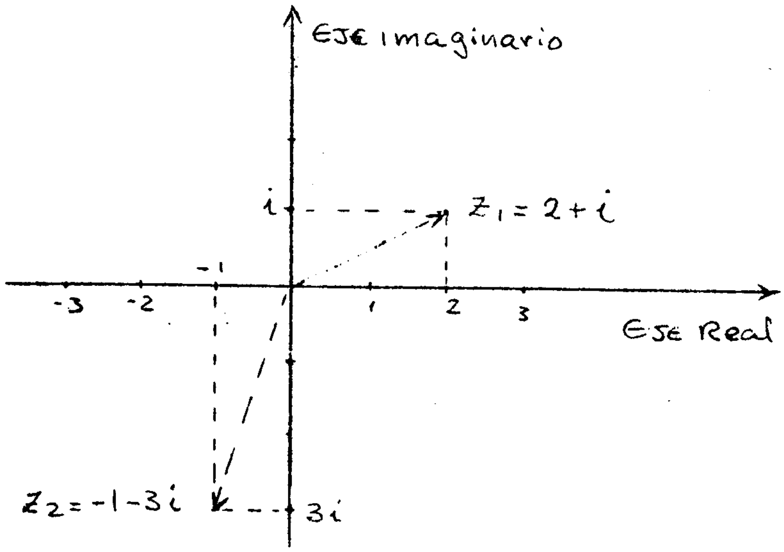
El conjugado de un complejo es interesante para nosotros por una razón que será revelada en los últimos capítulos del curso. Por ahora basta para nosotros recordar que si $Z \in \mathbb{C}$ y $w \in \mathbb{C}$ entonces:

(i) $\overline{Z + w} = \overline{Z} + \overline{w}$

(ii) $\overline{Z.w} = \overline{Z}.\overline{w}$

(iii) $\overline{Z} = Z \iff Z \in \mathbb{R}$

La representación geométrica de un número complejo es algo que hasta ahora hemos mantenido en suspenso, ella se debe a un agrimensor noruego y a un tenedor de libros francés, ellos son: Wessel y Argand. Tal representación lleva el nombre del último y se le conoce como <u>diagrama de Argand</u>. Héla aquí:



Como puedes apreciar consiste de dos copias perpendiculares de la recta real.

En la horizontal se tienen las partes reales del complejo Z: Re(Z). En la vértical se tienen las partes imaginarias de Z : Im(Z).

Aparecen representados en la figura $Z_1 = 2 + i$, $Z_2 = -1 - 3i$

EJERCICIOS

1.- Dados los complejos siguientes, escribe el conjugado de cada uno de ellos.

Dibuja las representaciones de ambos : Z y $\bar{Z}$.

a) $Z_1 = 2 + 3i$ c) $-3i$

(b) $Z_2 = 4$ d) $-\sqrt{2} + 5i$

Vamos a terminar este aparte definiendo las operaciones en $\mathbb{C}$.

OPERACIONES EN $\mathbb{C}$.

Sean $z = a + bi$, $w = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

SUMA .-

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

PRODUCTO

$$z.w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

PROBLEMA 20.

Realizar las operaciones indicadas. Dejar el resultado en la forma standard.

a) $(2 - i) + (3 + 7i)$ d) $(3 - 2i)(4 + i)$

b) $(4 - i) - (6 - 2i)$ d) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

SOLUCION

a) $(2 - i) + (3+7i) = (2 + 3) + (-i + 7i) = 5 + 6i$

b) $(4 - i) - (6 - 2i) = (4 - i) + (-6 + 2i) = -2 + i$

c) $(3 - 2i)(4 + i) = (12 -(-2)) + (-8 + 3)i = 14 - 5i$

e) Para hacer la división:

$\dfrac{z}{w} = \dfrac{1 + i}{1 - i}$ multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de w : $\bar{w}$.

Asi: $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{(1-1)+(1+1)i}{(1+1)+(-1+1)i} = \dfrac{0+2i}{2+0i} = i$

EJERCICIOS

1.- Efectua las operaciones indicadas:

1.- a) $(2-i)+(3+7i)$ c) $(\pi i)+(\frac{\pi}{2}i)$ e) $(\pi+i)(1-\pi i)$

b) $(\frac{1}{2}-i)-(6-2i)$ d) $(1+i)-(1-i)$ f) $(\sqrt{3}-i)(i+\sqrt{2})$

2.- Efectúa las siguientes operaciones. Escribe el resultado en la forma standard.

a) $\dfrac{-11i}{2-7i}$ c) $\dfrac{-2+3i}{-2-3i}$ e) $\dfrac{1}{1+i}$

b) $\dfrac{3+i}{6+i}$ d) $\dfrac{13+10i}{-7i}$ f) $\dfrac{-2+3i}{-2-3i}$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones para x e y. Tener presente que $a+bi = c+di \iff a=c \quad b=d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

a) $5 - yi = x + 3i$ c) $2x - i = i(x-yi)$ e) $6i(\overline{x+yi}) = 9$

b) $\dfrac{x}{2} + 3i = 1 - yi$ d) $\dfrac{-2}{x+yi} = 1$ f) $x + yi = 0$

aarm.

18.02.80.-

BIBLIOGRAFIA

Los textos que se incluyen fueron consultados en la redacción del Capítulo 1 y/o se recomiendan al lector para ampliar los puntos aquí **tratados.**

1.- ALLENDOERFER/OAKLEY .... "FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS UNIVERSITARIAS"

2.- AYRES, F .... "ALGEBRA MODERNA"

3.- BEHR/JUNGST....................... "FUNDAMENTALS OF ELEMENTARY MATHEMATICS.

4.- BRITTON/KRIEGH/RUTLAND............ "MATEMATICAS UNIVERSITARIAS"

5.- CORTES, I......................... "ORDEN EN LOS REALES". Texto Programado. UNET. 1978.

6.- CABRERA, A........................ "GUIAS DE MATEMATICA 10. U.L.A."

7.- DANTZIG, T .... "NUMBER, THE LANGUAJE OF SCIENCE"

8.- LEAVITT, T.C. .... "LIMITS AND CONTINUITY"

9.- LE LIONNAIS, F .... "LAS GRANDES CORRIENTES DEL PENSAMIENTO MATEMATICO"

10.- MOORE, H. G. .... "PRE-CALCULUS MATHEMATICS"

11.- NATIONAL COUNCIL OF THEACHERS OF MATHEMATICS.......... "EL SISTEMA DE NUMEROS RACIONALES".

12.- "EL SISTEMA DE NUMEROS REALES"

13.- NEWMAN, J .... "EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS"

14.- ORE, O .... "NUMBER THEORY AND ITS HISTORY"

15.- THE OPEN UNIVERSITY .... "SISTEMAS NUMERICOS"

16.- TITCHMARSH, E. C. .... "ESQUEMA DE LA MATEMATICAS ALTUAL"