

CAPITULO 6

LIMITES

Introducción:

La idea de límite aparece intuitivamente en muchas situaciones. En Geometría euclidiana se define la longitud de una Circunferencia como el "límite" a que tiende una Sucesión de perímetros de polígonos incriptos o circuncriptos en ella, cuando la longitud de cada lado tiende a cero.

La misma idea se utiliza para definir el área de un círculo mediante área de polígonos inscriptos o circunscriptos

Nuestro problema por resolver plantea una variante distinta, aunque también es un "límite" el concepto que examinaremos. Eso si, este análisis será desde un punto de vista esencialmente geométrico y sin demostraciones, con algunos cálculos algebraicos de límites simples.

Por tanto, a través de esta "visual" geométrica podemos aspirar a tener una idea aproximada de lo que realmente ocurre y de las condiciones que deben darse para ello. El análisis riguroso debería realizarse recurriendo a definiciones y formas que implican necesidades de otros conceptos (pero también de mayor tiempo para su desarrollo) y enseguida complementar la idea con la "visual" geométrica.

En el programa no está contemplado este tratamiento, en cambio, se ha considerado pertinente introducir el concepto de límite

funcional en su expresión geométrica, por razones de necesidad - que acá no es del caso precisar.

6.1.- Límite Finito en un Punto: Idea Geométrica.

Enunciado del Problema:

Nos interesa ver en que condiciones los valores de una función (es decir, los valores de la ordenada) se aproximan o se acercan a un valor determinado, cuando los valores del dominio (es decir los valores de la abscisa) se acercan al punto a, que puede o no pertenecer a dicho dominio.

Dos cuestiones fundamentales no está señalando lo enunciado - anteriormente:

- 1.- En la medida que los valores del dominio se aproximan a un punto a, en ciertas funciones, los valores de la función (medidos en la ordenada) también se aproximan a un valor - que llamaremos límite de la función y que denotaremos por L.
- 2.- El punto a, no importa que pertenezca o no, al dominio de la función, es decir, no interesa si existe o no existe - el valor de la función en el punto a.

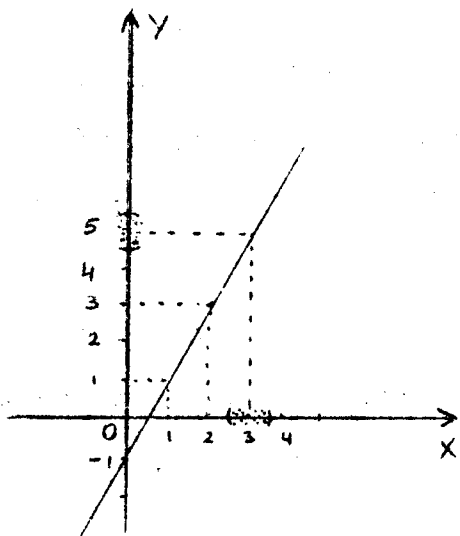
Ilustremos con dos ejemplos y sus gráficas.

Ejemplo 1.-

Analizar el límite en $x=3$ de la siguiente función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x) = 2x-1$$

Consideremos su gráfica:



Tomemos valores del dominio cada vez más próximos a 3, pero sin considerar al número 3.

Como podemos acercarnos a 3 tanto por la izquierda como por la derecha, hablaremos de un "entorno" del punto 3 indicando con ello que consideramos todos los valores próximos y cada vez más próximo a 3, tanto por la izquierda como por la derecha.

Escribamos "algunos" valores de esta aproximación al punto 3 en la tabla siguiente:

abscisa		
x	2,8....2,9....2,99....2,999	3,001...3,01...3,1...3,2..
f(x)=		
2x-1	4,6....4,9....4,98....4,998	5,002...5,02...5,2...5,4,.
ordenada	por la izquierda	por la derecha.

NOTA:

Es para ser dejados bien en claro que podemos anotar solamente algunos valores de la aproximación, pues en el entorno existen infinitos valores.

Si ahora comparamos la gráfica con la tabla de valores, es claro que ambos nos "induce" a pensar que mientras más próximos estamos de la abscisa 3, en la ordenada estamos más próximos a 5.

En el caso que hemos analizado, hemos podido observar la idea geométrica de límite, en consecuencia, adoptaremos una notación matemática para la misma. Escribiremos.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x-1) = 5$$

que significa y se lee:

"Cuando x tiende a 3, el límite de la función f es igual a 5".

Ejemplo 2.

Aclaremos con este ejemplo porque se dijo anteriormente que el punto abscisa a (al cual tiende x) "puede o no pertenecer al dominio de la función".

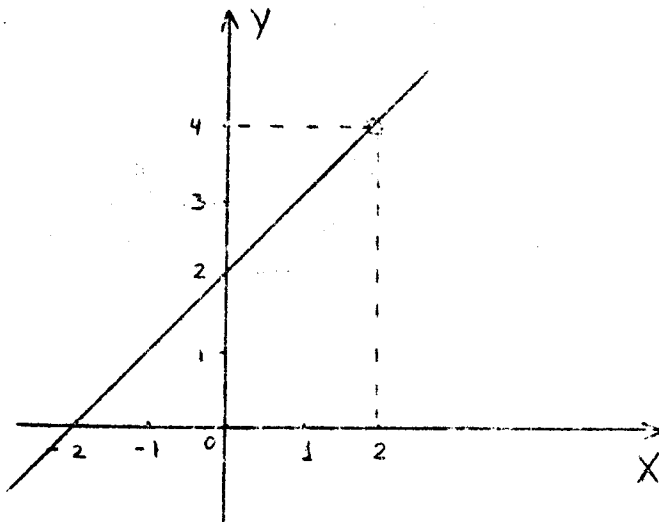
Analizar el límite en $x=2$ de la siguiente función:

$$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Nótese que esta función no está definida en el valor 2, lo que significa que en la gráfica no existe punto de abscisa 2.

Así lo observaremos en la gráfica donde quedará un punto "hueco" en la recta.

Gráfica:



Tenemos en un "entorno" de 2, valores del dominio cada vez más próximo a 2 y escribámoslos en una tabla:

abscisa		
X	1,5...1,9,,,1,99...1,999	2,001..2,01..2,1..2,5
$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$	3,5...3,9...3,99...3,999	4,001..4,01..4,1..4,5
ordena da	por la izquierda	por la derecha

Como en el caso anterior, por la gráfica y la tabla de valores podemos observar que al aproximarnos a 2, el valor de la función se aproxima al número 4, y anotamos para este caso, en la forma señalada anteriormente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Observación:

Es importante insistir y resaltar que la función

$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ no está definida para $x=2$, sin embargo cuando x tiende a 2, el límite de g existe y es igual a 4.

Notación:

En general denotaremos por L el límite finito, si existe, de una función f , cuando x se aproxima a un punto a , luego escribiremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{y} \quad L \in \mathbb{R}.$$

6.2... Teorema sobre límites

Ahora daremos algunos teoremas. Es evidente que no podremos demostrarlos, pero sus enunciados los necesitamos para usarlo en el cálculo propiamente tal de límites.

Teorema 1. (De la unicidad del límite)

Si,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2, \quad \text{entonces se cumple}$$

$$\text{que: } L_1 = L_2$$

Observación:

Este Teorema nos afirma que una función no puede aproximarse a dos límites distintos simultáneamente. Así queda garantizado que si el límite de una función existe, éste es único

Teorema 2.

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C \quad (C \text{ una constante real})$$

Teorema 3.

$$\lim_{x \rightarrow a} X = a$$

$$\text{Dados } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L_3; \quad L_1, L_2, \text{ y } L_3 \text{ números reales}$$

entonces:

Teorema 4.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x) \pm h(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L_1 \pm$$

$$L_2 \pm L_3$$

Observación:

Puede ser extendido a cualquier número finito de funciones.

Teorema 5.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2.$$

Observación:

Puede ser extendido a cualquier número finito de funciones.

Teorema 6.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \text{ Siempre que } L_2 \neq 0.$$

Teorema 7.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \text{ Siempre que } L_1 > 0$$

y $N \in \mathbb{N}$ y $N \neq 2$ ó $L_1 \leq 0$ y N entero impar positivo

Teorema 8.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L_1^n ; \forall n \in \mathbb{N}.$$

6.3. Aplicación de los Teoremas al cálculo de límites:

1.- Calcular: $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1).$

Esta fué la función cuya gráfica dibujamos y cuya tabla de valores en un entorno de 3, nos insinuaron que su límite es 5.

Ahora calcularemos su límite por la aplicación de los Teoremas:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 3} 2x - \lim_{x \rightarrow 3} 1 \quad (\text{Teo 4})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 1 \quad (\text{Teo 5})$$

$$= 2 \cdot 3 - 1 \quad (\text{Teo 2 y 3})$$

$$= 5.$$

Ejemplo 2. Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2 + 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)} \quad (\text{Teo 6})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x - \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2} \quad (\text{Teo 4})$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2} \quad (\text{Teo 5 y 8})$$

$$= \frac{[\lim_{x \rightarrow 1} x]^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2}$$

$$= \frac{3 \cdot 1 - 1}{(1)^2 + 2} \quad (\text{Teo 2 y 3})$$

$$= \frac{2}{3}$$

Ejemplo 3

Calcular

$\lim_{x \rightarrow 2}$

$$\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}$$

Se observa que el límite del numerador será positivo y también el límite del denominador, luego el límite de la función dada existirá. Recuerde aquí que el índice de la raíz es par.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5)}}$$

Se continúa hasta obtener:

$$= \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} = \sqrt{\frac{15}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3}$$

(justifíquense los pasos).

6.4.- Formas Indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$

En el teorema 6; si fuese $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

no podría asegurarse nada a respecto al límite del cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

este puede existir o no y en caso de existencia puede tomar cualquier valor real. Pero entonces diremos que está planteado un caso de indeterminación (el cual representaremos simbólicamente por la expresión $\frac{0}{0}$) ó que el límite de

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

está indeterminado en el punto a.

Por ejemplo, si se nos pidiera calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Podemos verificar que, al calcular el límite en el punto 2 con la aplicación de los teoremas, estos son 0 en el numerador y denominador simultáneamente, es decir, nos encontramos con una expresión del tipo $\frac{0}{0}$ (que debe considerarse carente de sentido y solo como un Símbolo)

Estamos entonces ante una indeterminación del límite en $x=2$, y por consiguiente no podremos calcular su límite hasta tanto no hallamos eliminado esta indeterminación.

En algunos casos sencillos, precisamente como este ejemplo, se puede calcular el límite mediante transformaciones simples, pero en otros casos habrá que resolverlo recurriendo a otras herramientas matemáticas. Estos últimos ciertamente no se estudian en este curso.

Nuestro ejemplo admite la siguiente Transformación.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2}$$

y ahora puede ser dividido en su numerador y denominador por el factor $(x-2)$ siempre que $x \neq 2$, pues si no, estaríamos dividiendo por cero (lo cual no es permitido)

Efectivamente, al calcular el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ estamos considerando

valores de x muy próximos a 2, pero distintos de 2 (además - esta función no está definida para $x = 2$)

Luego realizamos la división del numerador y del denominador por $(x-2)$ y la solución se desarrolla así:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)$$

Notamos que esta última expresión no está indeterminada.

En consecuencia aplicamos los teoremas de límite y calculamos su valor.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = 4$$

Recuérdese que también dibujamos la gráfica de esta función y éste era el valor que había "mostrado" la gráfica y había "insinuado" la tabla de valores que dimos.

6.5.- Indicaciones para evitar la indeterminación $\frac{0}{0}$ en casos que admita simplificaciones.

Estas indicaciones podrán ser utilizadas en funciones fraccionarias que contengan polinomios en su numerador y denominador, siempre que existan la indeterminación del límite.

- 1.- Si la variable independiente x tiende a un valor a valor a siempre será raíz del polinomio del numerador y del polinomio del denominador.
- 2.- Sabiendo que a es raíz en el numerador y en el denominador, factorizamos ambos polinomios.
- 3.- Hecha la factorización se simplifica la fracción dividiendo numerador y denominador por $(x-a)$
- 4.- Si persistiera la indeterminación procedemos repitiendo los pasos anteriores.

Ejemplo: 1

$$\text{Cácular : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$$

Cuando aplicamos los teoremas de límites, surge la indeterminación $\frac{0}{0}$ Debemos eliminarla antes de aplicar los teoremas

Observamos que el polinomio del numerador no es simple de factorizar. Pero por Ruffini:

	1	-1	-1	10
-2		-2	6	-10
	1	-3	5	<u>0</u>

entonces:

$$x^3 - x^2 - x + 10 = (x+2)(x^2 - 3x + 5), \text{ luego:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2 - 3x + 5)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 5}{x+1}$$

ya no existe la indeterminación para el punto $x = -2$ luego aplicamos los teoremas y se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 5}{x+1} = \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 5}{-2 + 1} = -15$$

Ejemplo:2

Cálculo: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 1}$

Realizando una primera factorización queda:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - 1)}{\cancel{(x+1)}(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x+1}$$

Pero nuevamente aparece indeterminación en el punto -1

Por tanto factorizamos otra vez y simplificamos.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$$

Ejemplo 3.

Cálculo : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x}$

En este tipo de ejemplo (aparecen raíces de funciones no polinómicas) para evitar la indeterminación en el punto 0. Es preciso racionalizar (el numerador), por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2 - \sqrt{4-x}][2 + \sqrt{4-x}]}{x [2 + \sqrt{4-x}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{x [2 + \sqrt{4-x}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x [2 + \sqrt{4-x}]}$$

De donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x [2 + \sqrt{4-x}]}$$

Podemos cancelar tanto numerador y denominador por x y entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}}$$

$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Ahora estudiaremos la geometría de otras variantes del concepto de límite, pero antes nos daremos el significado de recta Asíntota.

6.6.- Recta Asíntota

Definición: Si para una curva dada, existe una recta tal que un punto P de la curva se aleja indefinidamente del origen y la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, a dicha recta la llamaremos Asíntota de la curva.

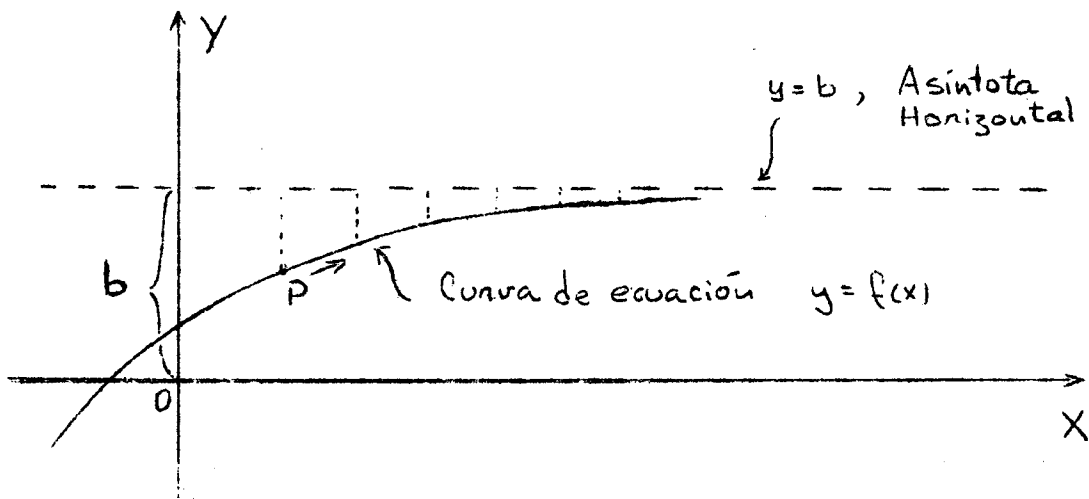
Esta definición implica para una curva dos cosas:

- 1.- Una curva que tiene una asíntota no es de extensión finita sino que se extiende indefinidamente.
- 2.- Una curva se aproxima a su asíntota más y más, a medida que se extiende más y más en el plano.

Siendo la asíntota una línea, recta puede tener cualquiera de las tres posiciones particulares.

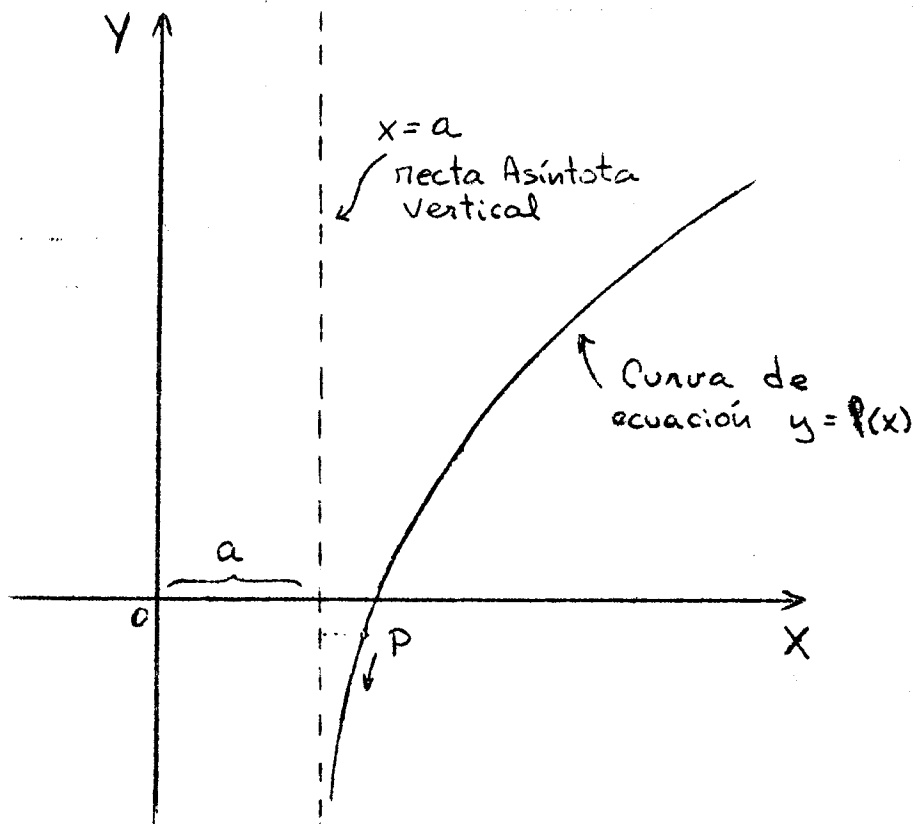
- a.- Si es paralela o coincide con el eje X, se llama asíntota horizontal con ecuación $y = b$

Ejemplo:



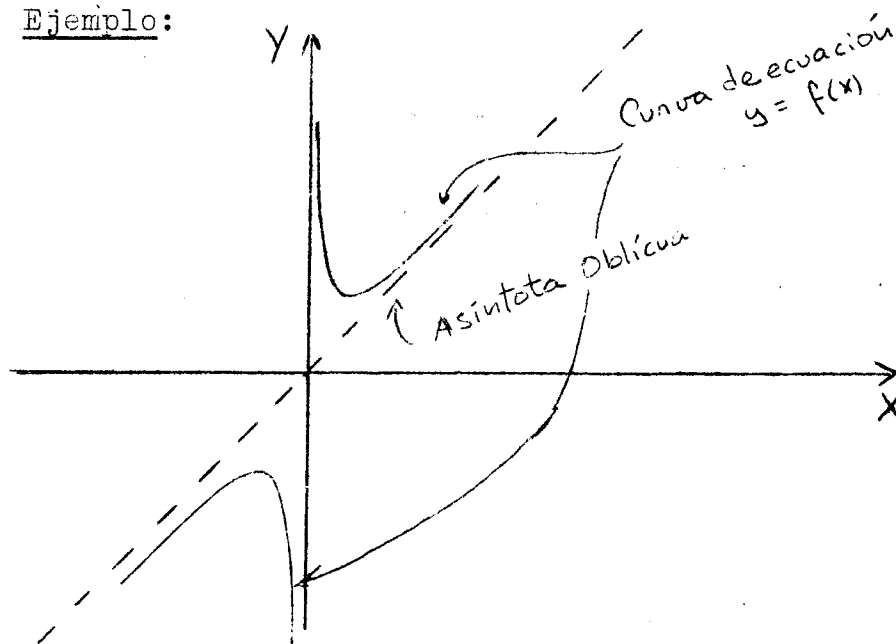
b.- Si es paralela o coincide con el eje Y se llama asíntota vertical con ecuación $x = a$

Ejemplo:



- c) Si no es paralela a ninguno de los ejes coordenados se llama Asíntota oblicua

Ejemplo:



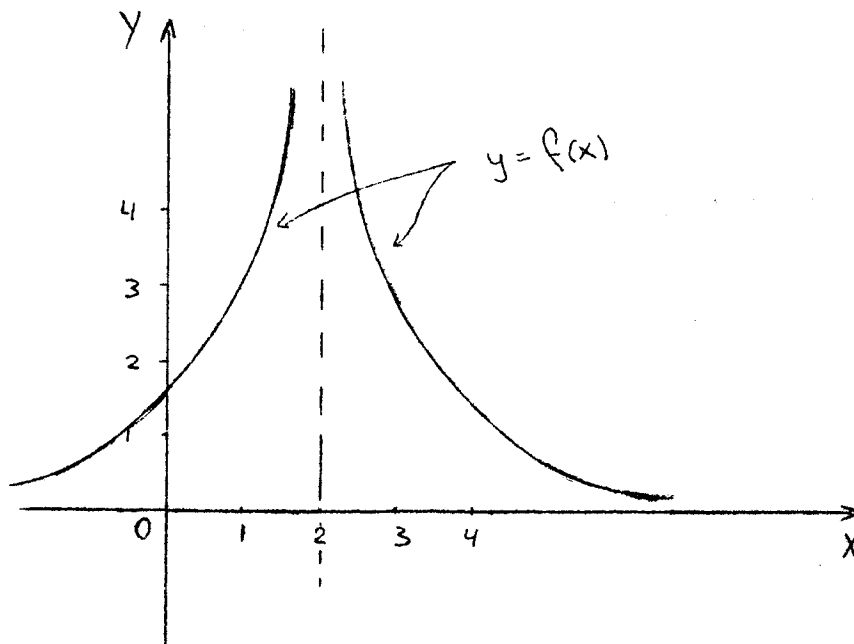
6.7.- Límite Infinito en un Punto: Idea Geométrica

Ilustremos con dos ejemplos:

Ejemplo 1.

Dada la función $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$

Examinemos su gráficas:



Tomemos en un "entorno" de 2, valores del dominio próximos a 2 y analicemos los valores de la función en la tabla siguiente:

Por la izquierda de 2

x	.1.... <u>3</u> <u>5</u> <u>7</u> <u>19</u> <u>199</u> <u>1999</u>
	2 3 4 10 100 1000
$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$	3...12...27...48...300...30.000 3.000.000

NO caben dudas que, a medida que x se acerca a 2, a través de valores menores que 2, el valor de la función f (x) crece enormemente, y continuará creciendo sin límite.

Por la derecha de 2

x	...1.... <u>5</u> <u>7</u> <u>9</u> <u>21</u> <u>201</u> <u>2001</u>
	2 3 4 10 100 1000
$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$... 3...12...27...48...300...30.000...3.000.000

lo mismo, al acercarse a 2 por valores mayores que 2, los valores de f(x) crecen sin límite.

Y como a medida que x se aproxima a 2 por la izquierda o por la derecha f(x) crece sin límite, anotamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

que se lee: "Cuando x tiende a 2 el límite de la función

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2} \quad \text{es más infinito, pero entendiendo con esto}$$

que el límite y el símbolo " $+\infty$ " (o en algún otro caso " $-\infty$ ") indica únicamente el comportamiento de los valores de la función que en este caso, crecen sin límite.

Ahora bien sabemos que $x=2$ representa una recta paralela al eje Y y a una distancia 2 de este eje. Hemos visto que podemos tomar valores todo lo próximo que deseemos en el "entorno" de 2. Pudimos comprobar que las imágenes son muy "grandes", todo lo "grande" que desearemos.

Pero en la medida que tomamos valores del dominio cada vez - más próximos a 2, podemos observar que las imágenes están cada vez más próximas a la recta $x = 2$

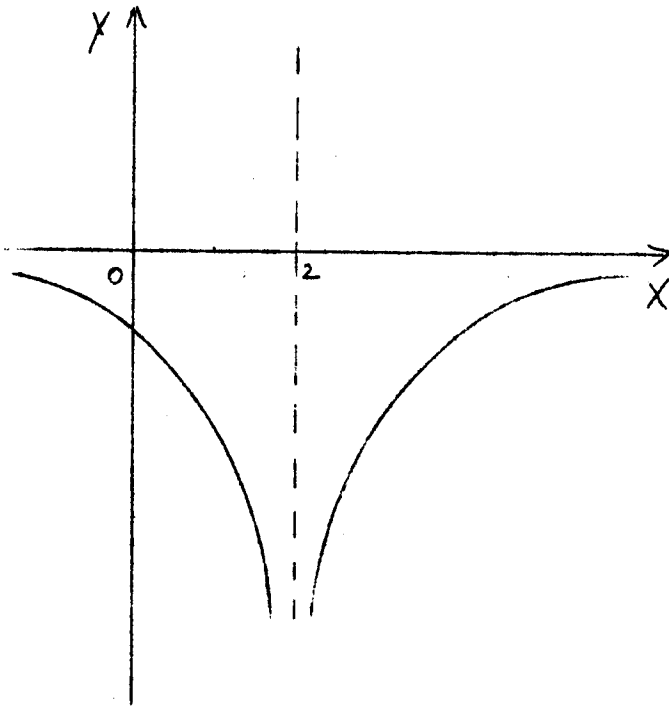
En conclusión, estamos en presencia de una asíntota vertical de la curva dibujada. Asíntota de ecuación $x=2$ y que también está dibujada en la gráfica.

Comportamiento similar ocurre en la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} \quad \text{con la diferencia que cuando } x \text{ tiende a 2, los}$$

valores de la función decrecen sin límite, tanto por la izquierda como por la derecha.

Gráfica:



Por ello escribimos:

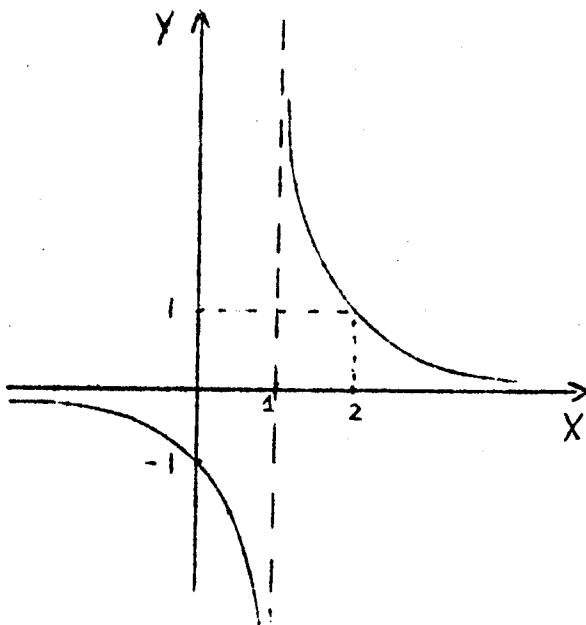
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

que se lee: "cuando x tiende a 2 , el límite de $\frac{-3}{(x-2)^2}$ es menos infinito" vemos también que la curva tiene una asíntota vertical de ecuación $x=2$

Ejemplo 2.

Dada $g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x-1}$

Observemos su gráfica:



Se puede ver que, cuando x tiende a 1 , la función no tiene límite, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad (\text{Por la derecha})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad (\text{Por la izq})$$

Para esta situación anotamos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \pm \infty$$

A medida que la curva se aleja del eje X, cualquiera sea el sentido, se nota su acercamiento a la recta de ecuación $x=1$.

Por tanto $x=1$ es una asíntota vertical de la función g .

Resumiendo diremos que $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función $y=f(x)$ si se cumple cualquiera de los límites siguientes:

$$\text{a.- } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

6.8.- Determinación de asíntotas verticales de una función

$y = f(x)$ dada (cuando existan).

- 1.- Se sabe que las ~~asíntotas verticales~~ tiene ecuación del tipo $x = a$ (a constante real)
- 2.- En general, para hallar las asíntotas verticales de una función f se busca todos los valores reales a para los cuales se sospecha que el límites de f resulte infinito. En efecto, bastara calcular ese límite para uno de esos valores " Sospechosos" y quedará claro si corresponden o no a sintotas verticales: Si el límite de f cuando x tiende a a , $+\infty$ (f crece sin límite) o $-\infty$ (f decre-)

ce sin límite) o es $\pm \infty$ (f crece por un lado y decrece - por el otro sin límite), entonces $x=a$ es una recta asíntota de f.

Observación:

Para el caso particular de una función fraccionaria, los valores a que anulan al denominador y no al numerador corresponden a rectas asíntotas verticales de la curva pues en ese caso resulta $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

en virtud del teorema 6.

Ejemplo:

Encontrar las ecuaciones de las asíntotas verticales de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Solución:

En este ejemplo no cabe duda que los valores que anulan al denominador no anulan al numerador, y por tanto, deben ser punto por donde pasa una asíntota vertical a la curva de f.

luego: $x = 1$ y $x = -1$

Son rectas asíntotas verticales.

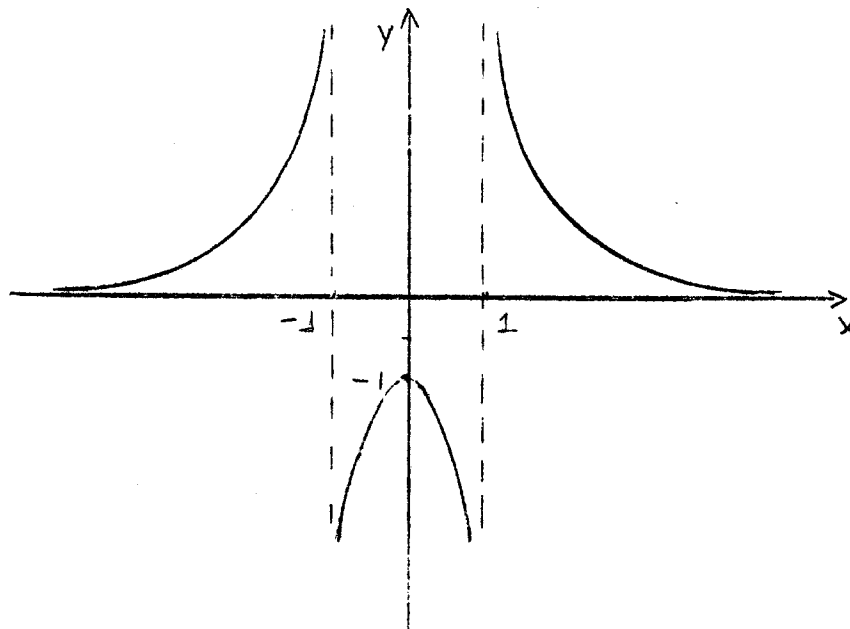
La verificación la obtenemos tomando el límite de f para los puntos mencionados (debe dar $+\infty$, $-\infty$ ó $\pm \infty$)

Entonces calculamos y obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - 1} = \pm \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \pm \infty$$

En ambos casos estamos indicando solamente que cuando nos acercamos al punto -1 ó 1 la función crece por un lado y decrece por el otro sin límites.

La gráfica ilustra la situación:



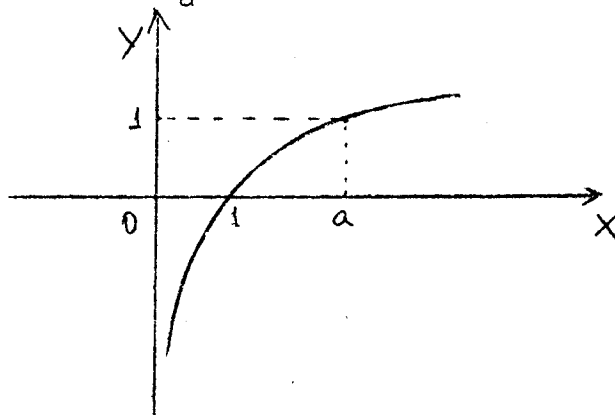
6.9.- Asíntotas Verticales de las Funciones:

$\log_a x$, $\operatorname{tg} x$ y x^{-1}

Estas funciones las hemos gráficado anteriormente.

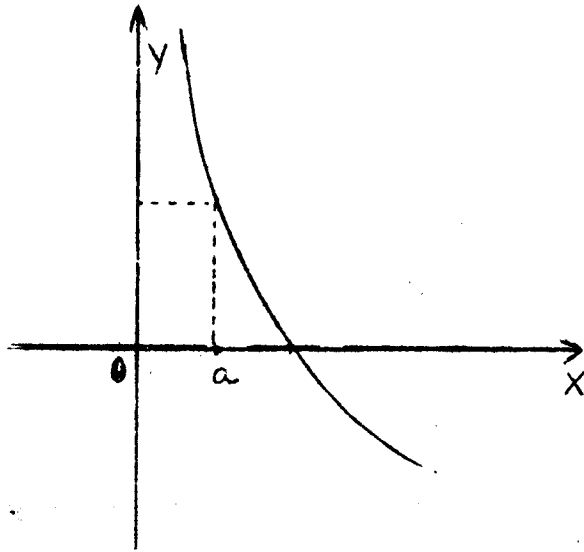
Conocemos tambien sus dominios y rangos. Ahora resaltaremos sus asíntotas verticales y las ecuaciones de éstas.

1.- a) $y = \log_a x$ con $a > 1$



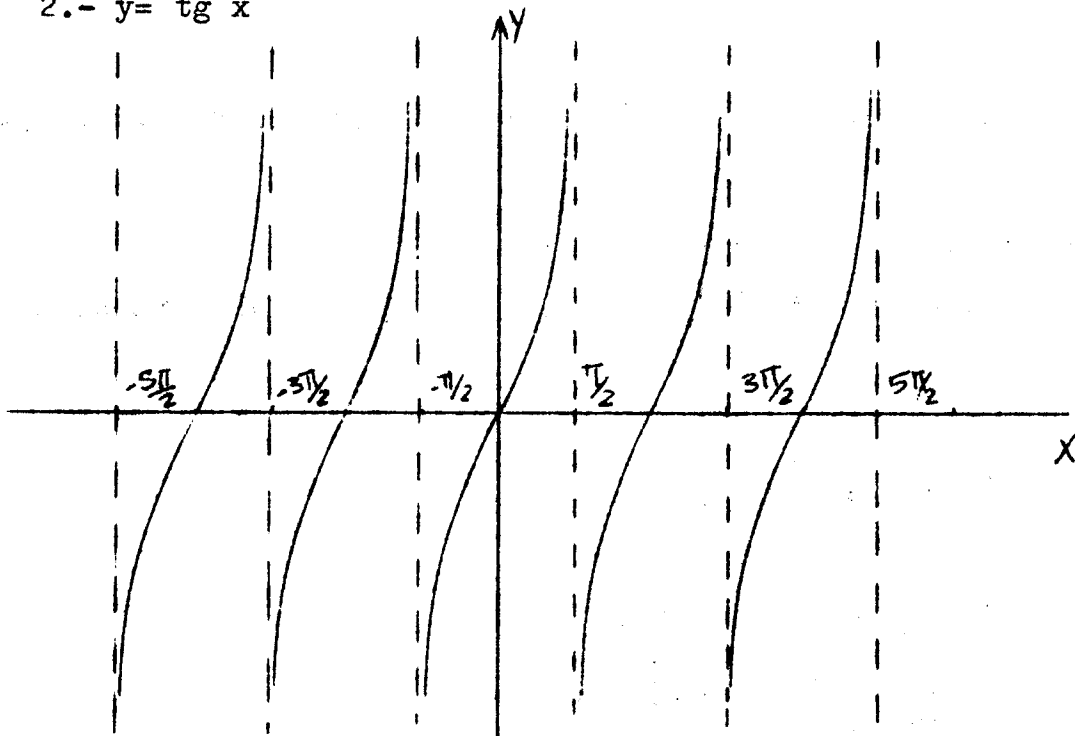
Tiene una asíntota vertical de ecuación: $x=0$ es decir el eje Y.

b) $y = \log_a x$ con $0 < a < 1$



Una asíntota vertical de ecuación: $X=0$ también el eje Y.

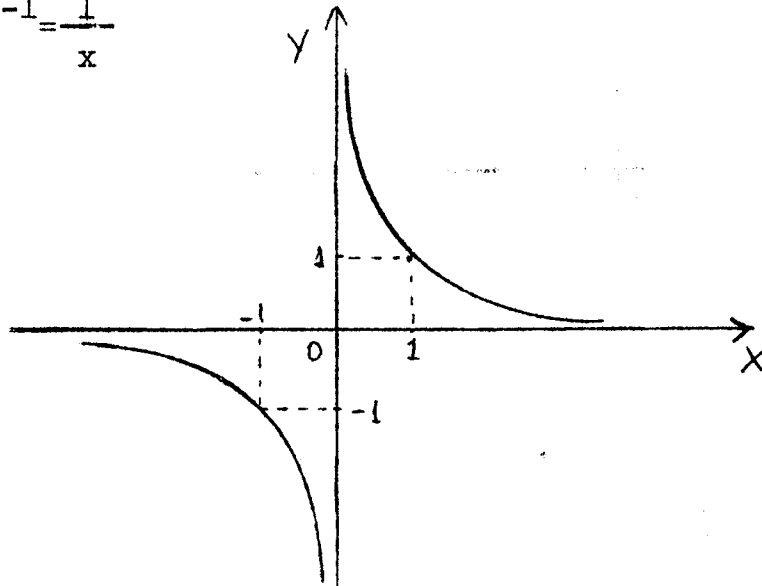
2.- $y = \operatorname{tg} x$



Infinita asíntotas, expresadas todas por la ecuación general:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$3.- \quad y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$



Una asíntota vertical de ecuación $x=0$ es decir el eje Y

6.10.- Otros teoremas sobre límites.

Dados $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$; $L \in \mathbb{R}$ entonces

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$$

2) Si $L \neq 0$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

5) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$$

6) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

6.11.- Formas Indeterminadas del tipo: $0 \cdot \infty$ ó $\infty \cdot 0$.

En el teorema 2 último Si $L=0$ (es decir $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=0$)

estamos en presencia de un caso de indeterminación en el punto a, el caso : $0 \cdot \infty$ ó $\infty \cdot 0$. Nada se puede asegurar entonces respecto al límite de la función producto $f \cdot g$ en el punto a.

Luego para aplicar los teoremas y calcular el límite de una expresión de este tipo previamente habrá que eliminar la indeterminación con transformaciones o simplificaciones algebraicas.

Ejemplos:

1- Sean $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 3x$

Cálculo: $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

Vemos entonces que el límite tiene indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$ en el punto $x=0$

Resolvemos la indeterminación:

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot 3x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$ (hemos dividido por x puesto que

$x \neq 0$).

2) Sean $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2 - 1$

Cálculo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(x-1)^2} \cdot (x^2 - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(x-1)^2} = \infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$$

El límite está indeterminado en $x=1$.

Resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x}{(x-1)^2} (x^2 - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x \cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)(x-1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x+1)}{x-1} = \infty$$

6.12.- Forma Indeterminada del tipo: $\infty - \infty$

Si se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ y se desea

obtener el límite de $f-g$ cuando x tiende a a se está en presencia de otro caso de límite indeterminado $\infty - \infty$.

Por tanto para encontrar el límite de esta diferencia de función habrá previamente que resolver la indeterminación con transformaciones algebraicas.

Ejemplos:

1.- Sean $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

$g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x-1}$

Cálculo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right] =$$

Se observa claramente que el límite pedido está indeterminado en el punto $x=1$.

Resolvemos la indeterminación :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2-x-1}{x^2-1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1-x}{x^2-1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

2.- Cálculo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{2x+1}{(x+1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{2x+1}{(x+1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$$

3.- Cálculo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \right] = -\infty$$

6.13.- Forma Indeterminada del tipo : $\frac{\infty}{\infty}$

Si se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

y se desea el límite de $\frac{f}{g}$ en el punto a , entonces se está en presencia de otro caso de límite indeterminado, $\frac{\infty}{\infty}$

luego para resolver el límite habrá previamente que resolver la indeterminación.

Ejemplo:

Sean $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{-3}{x^2}$

$g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{2x+1}{x^3}$

Cálculo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3}{x^2}}{\frac{2x+1}{x^3}}$$

Es claro que el límite está indeterminado en la forma $\frac{\infty}{\infty}$

en el punto $x=0$.

Resolvemos la indeterminación y calculamos el límite;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^3}{x^2(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{2x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

6.14.- Límite Finito cuando " x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a ∞ "

Idea Geométrica.

En esta variante observamos que en ciertas funciones cuando la variante independiente toma valores infinitamente alejados del origen entonces los valores de la función se van aproximando a un valor finito, que indicaremos por b , valor finito por el cual pasa una recta paralela al eje X de ecuación $y=b$.

En otras palabras las imágenes se van acercando a esta recta horizontal. En consecuencia estamos otra vez en presencia de una asíntota pero en este caso con posición horizontal:

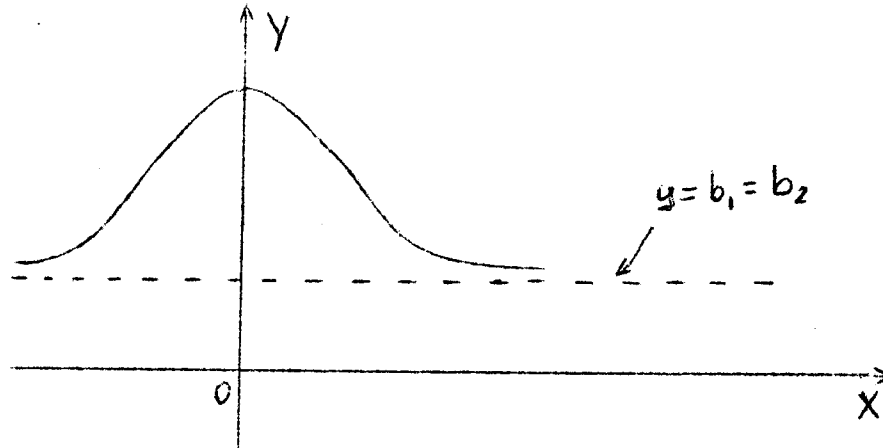
Esto lo escribimos así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_1 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_2$$

Pueden derivarse los casos siguientes:

1.- Puede ser que b_1 y b_2 coincidan:

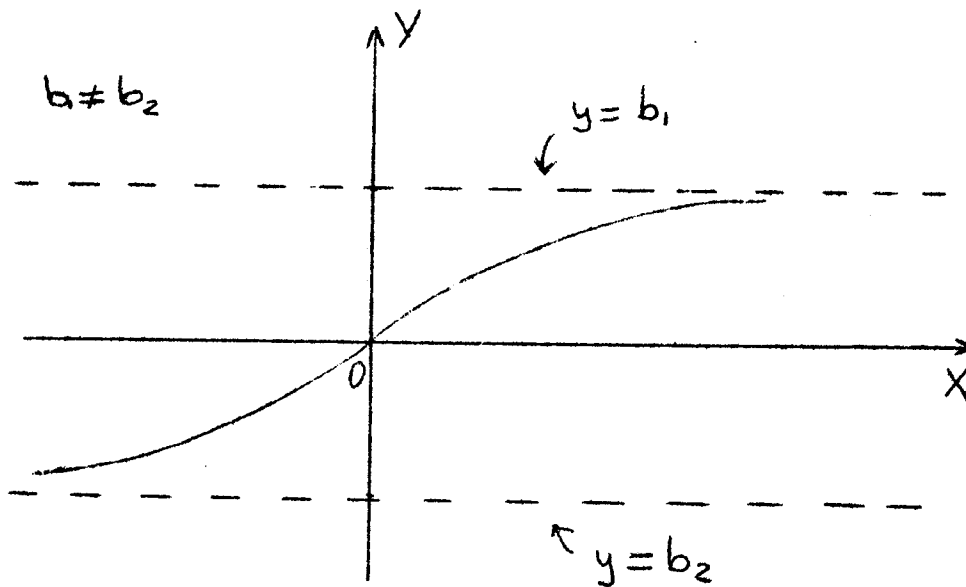
Ejemplo:



Una sola asíntota horizontal.

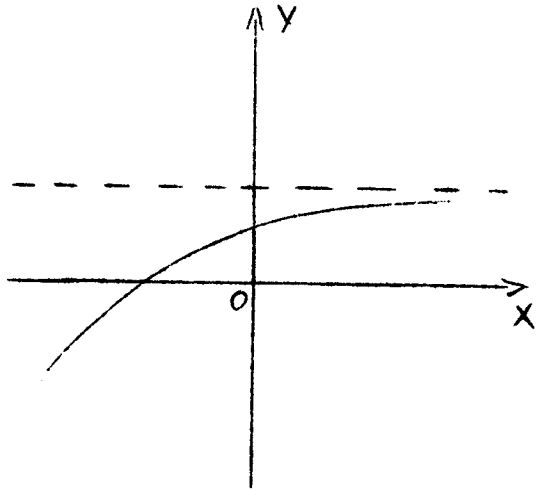
2.- Puede ser que b_1 y b_2 sean distintas :

Ejemplo:

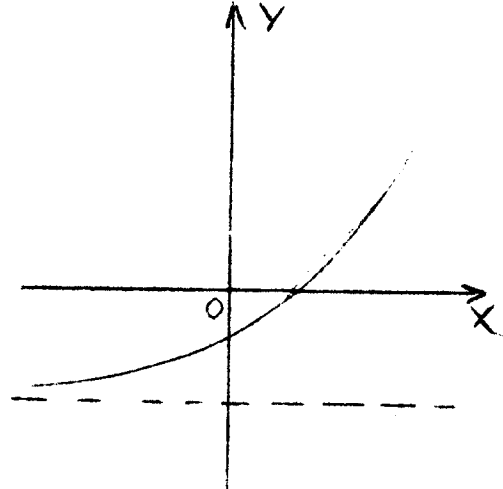


Dos asíntotas horizontales.

3.- Puede ser que exista b_1 y b_2 no exista y viceversa.



No existe b_2
Una asíntota horizontal.



b_1 no existe
Una asíntota horizontal.

6.15.- Determinación de asíntotas horizontales en una función

$y = f(x)$ dada (cuando existan)

Se sabe que una recta asíntota horizontal tiene ecuación del tipo $y = b$ siendo b el valor al cual se aproxima la función, cuando x tiende a " $+\infty$ " o a " $-\infty$ ".

Por tanto para hallar las asíntotas horizontales (si existen) de una curva se deben calcular los límites de la función dada cuando x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $-\infty$.

En el caso de dar algunos de esos límites un valor finito estos

estos puntos indican por donde pasan rectas Asíntotas horizontales.

Ejemplos:

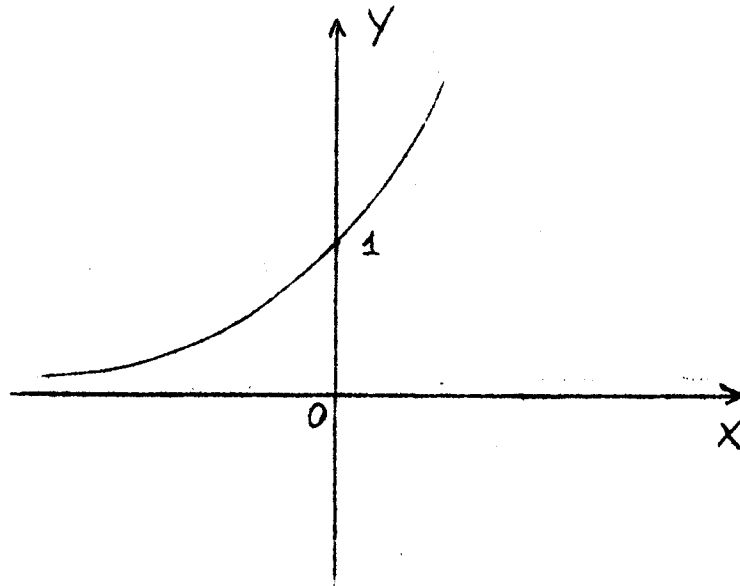
Asíntotas horizontales de las funciones:

$$a^x; \arctg x; \frac{1}{x}$$

Esta funciones las hemos graficado anteriormente, conocemos también sus dominios y sus rangos. Indicaremos ahora sus asíntotas horizontales con sus ecuaciones

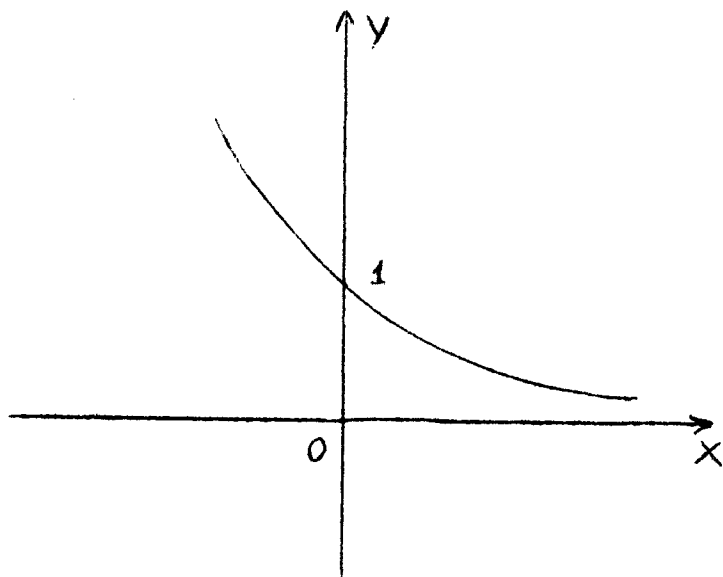
1.- $y=a^x$

$a \rightarrow$ Caso $a > 1$



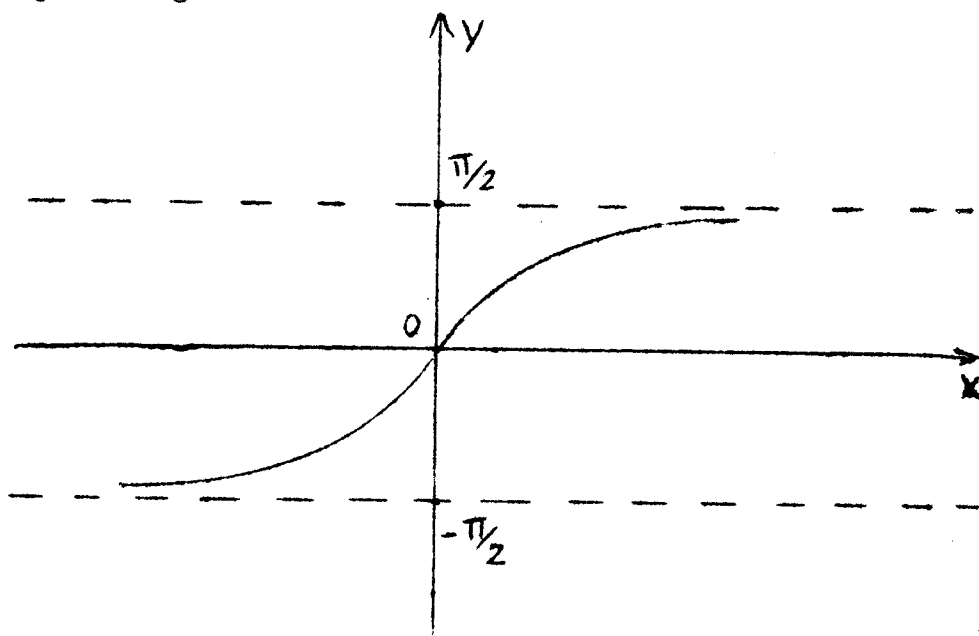
Asíntota de ecuación $y=0$ (el eje X) Cuando x tiende a $-\infty$.

b) caso $a < 1$



Asíntota de ecuación $y=0$ (el eje X) cuando x tiende a $+\infty$

2) $y = \arctg x$

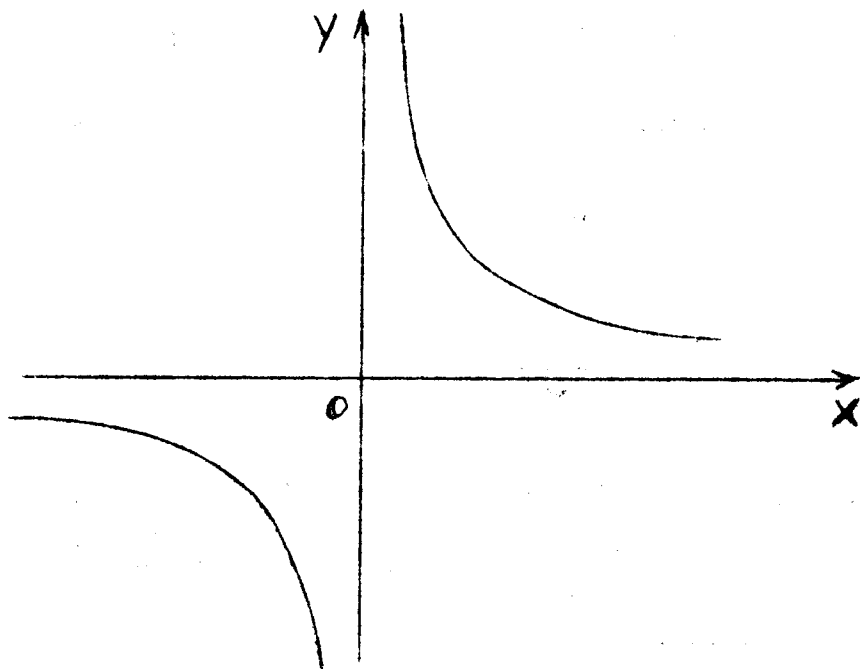


Dos asíntotas horizontales:

$$y = -\frac{\pi}{2} \quad \text{cuando } x \text{ tiende a } -\infty$$

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \text{cuando } x \text{ tiende a } +\infty$$

$$3) \quad y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$



Una asíntota horizontal de ecuación $y=0$

Cuando x tiende a $+\infty$ o cuando x tiende a $-\infty$

Cuando se intente calcular el límite en una función fraccio-
 naria con polinomios en el numerador y el denominador para
 cuando x tiende a $+\infty$, o, para cuando x tiende a $-\infty$, no encon-
 tramos que el límite se presenta indeterminado en la forma
 $\frac{\infty}{\infty}$ Por lo tanto para calcular el límite habrá previamente
 ∞

que resolver la indeterminación.

Es recomendable la siguiente regla para tal efecto:

- 1.- Ubicar la mayor potencia de x , no importa si se encuentra en el polinomio del numerador o del denominador.
- 2.- Cada término del numerador y del denominador se divide por la mayor potencia de x encontrado en 1)
- 3.- Formado el cociente en cada término del numerador y del denominador se se aplica el teorema siguiente:

Teorema " Si n es cualquier entero positivo se tiene"

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

- 4.- Resuelva la indeterminación en el paso 3, a continuación mediante los teoremas sobre límites.

Ejemplo:

1- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$

a) Cálculo

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$$

- b) Indicar la o las ecuaciones de rectas asíntotas horizontales si existen.

Solución:

Como se observa el límite de f está indeterminado cuando x tiende a $+\infty$ ó x tiende a $-\infty$ y tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Como se trata de polinomios en el numerador y denominador procedemos de acuerdo con la regla. Potencia mayor es x^2 , luego:

$$a) i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2 //$$

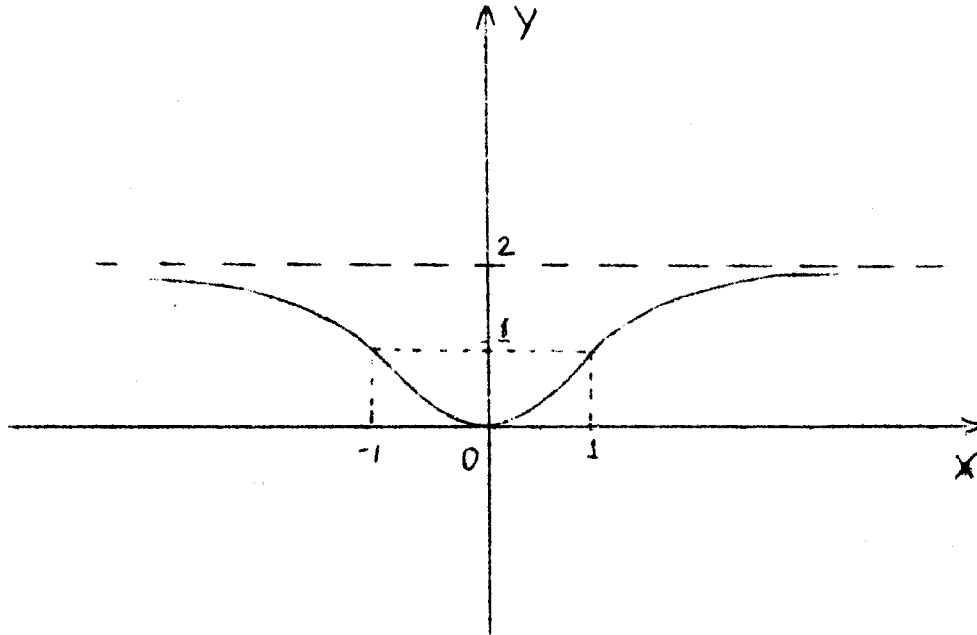
$$b) ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = 2 //$$

b) Cuando x tiende a $+\infty$, el límite de f es 2, luego la recta asíntota horizontal es $y=2$

Cuando x tiende a $-\infty$ el límite de f es 2, luego la recta asíntota horizontal también es $y=2$

Por tanto esta función tiene una sola asíntota.

Gráfica:



2) Calcular: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$

límite indeterminado en la forma $\frac{\infty}{\infty}$, luego:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{4} = 0 //$$

ecuación de la asíntota horizontal: $y=0$ (eje X)

3) Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1 - 0}{0} = +\infty$$

no existen asíntotas horizontales.

6.16.- Límite Infinito Cuando "x tiende a $+\infty$ " y cuando "x tiende a $-\infty$ " Idea Geométrica

a) Existen funciones que presenta el siguiente comportamiento. Cuando x tiende a $+\infty$ entonces f(x) tiende a $+\infty$.

Se escribe :

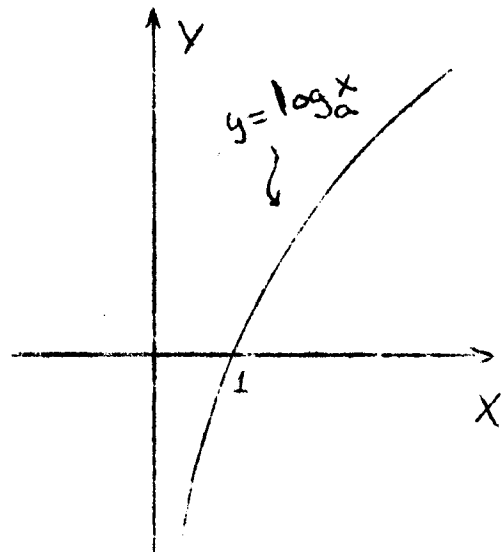
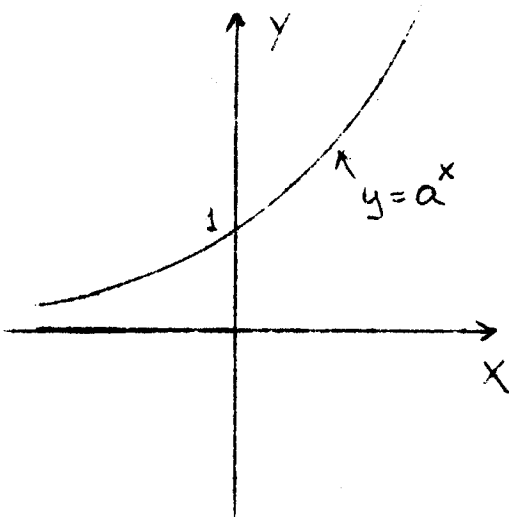
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

y significa geoméricamente que la curva se aleja de ambos ejes coordenados constantemente por el primer cuadrante.

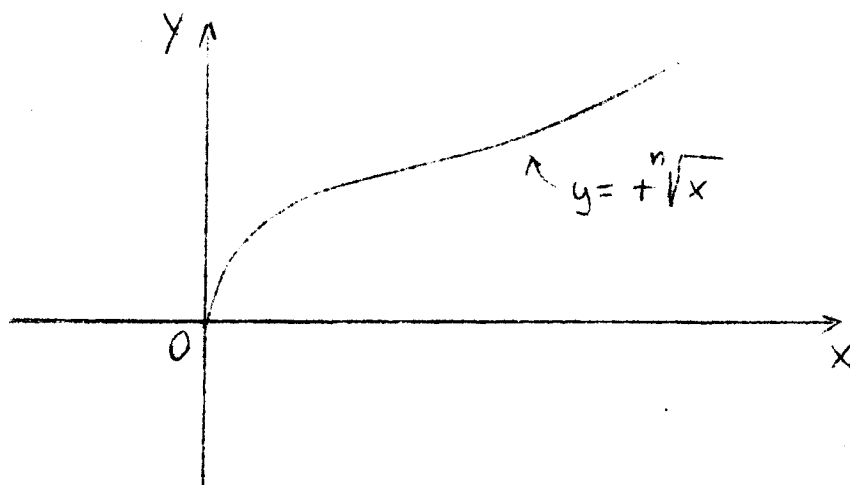
Ejemplo:

1) $y = a^x$ con $a > 1$

2) $y = \log_a x$ con $a > 1$



3) $y = +\sqrt[n]{x}$ con n par positivo



b) Cuando x tiende a $+\infty$ entonces $f(x)$ tiende a $-\infty$ y se escribe:

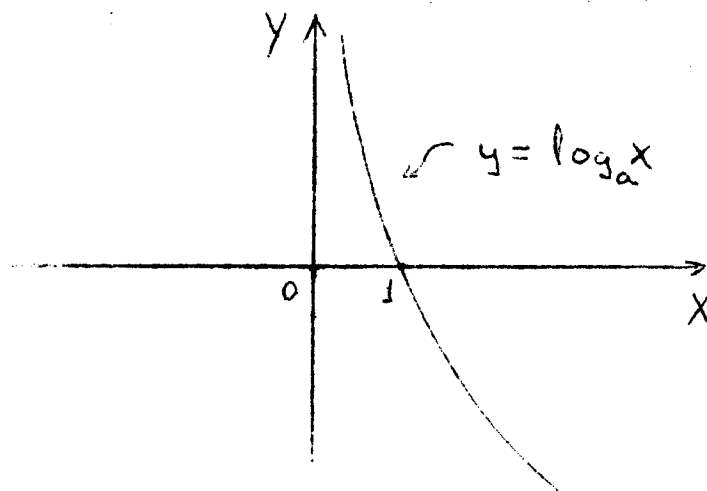
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Geométricamente significa que la curva

se aleja de ambos ejes coordenadas constantemente por el -
cuarto cuadrante.-

Ejemplo:

1) $y = \log_a x$ con $0 < a < 1$



- c) Cuando x tiende a $-\infty$ entonces $f(x)$ tiende a $+\infty$ y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{Geom\u00e9tricamente significa que la fun-}$$

ci\u00f3n se aleja de ambos ejes coordenadas **constantemente por el 2do. cuadrante.-**

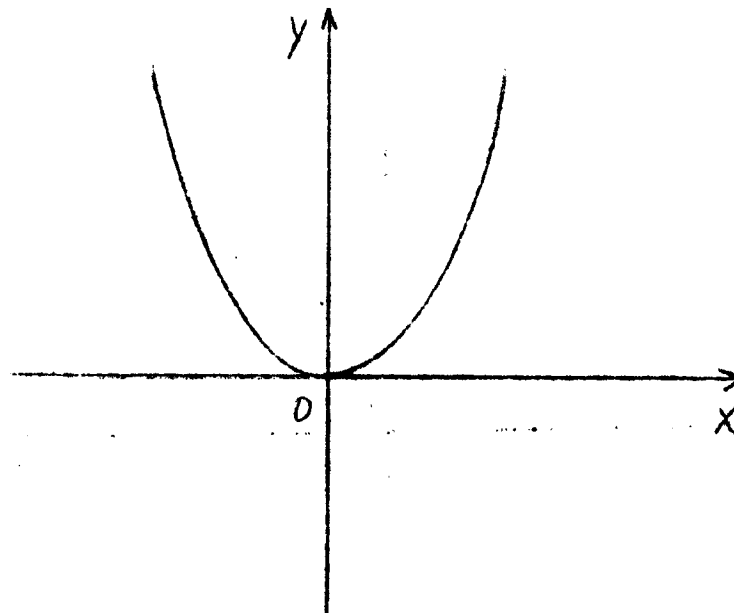
- d) Cuando x tiende a $-\infty$ entonces $f(x)$ tiende a $-\infty$ y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{Geom\u00e9tricamente significa que la funci\u00f3n}$$

se aleja de ambos ejes coordenadas **constantemente por el tercer cuadrante.-**

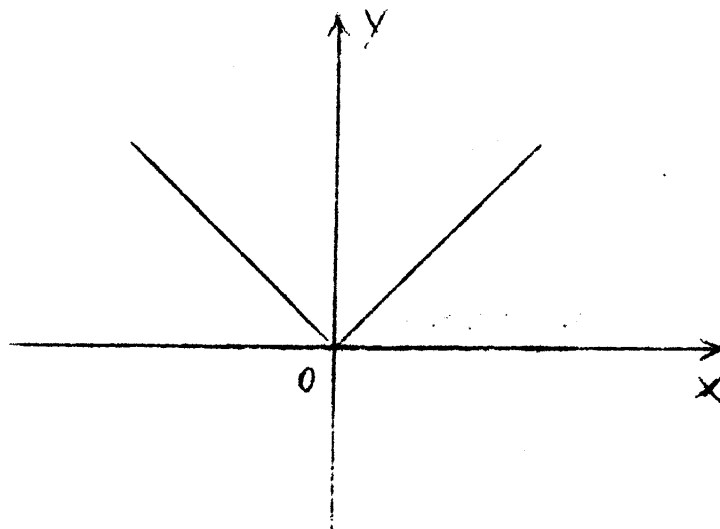
Ejemplos:

- 1) $y = x^n$ n par positivo.



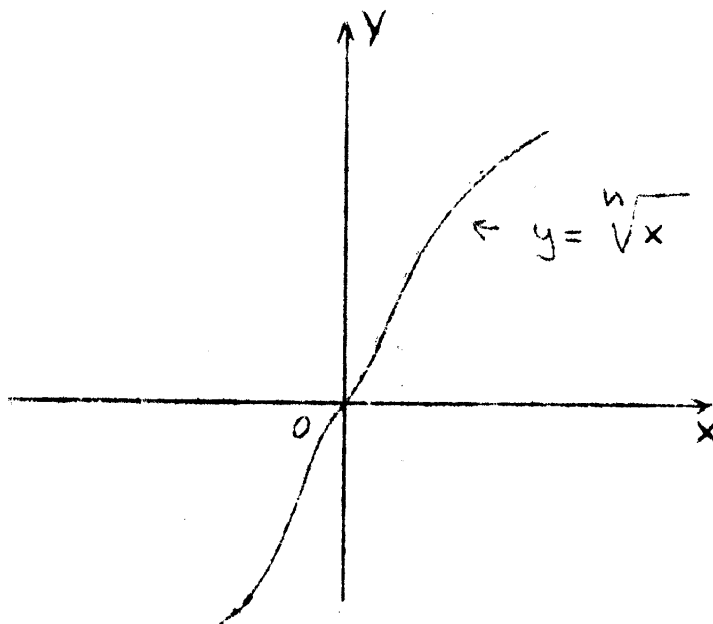
Esta funci\u00f3n se aleja de la forma c) pero similarmente se aleja de la manera a).

$$2) y = |x|$$



Se aleja tambien de la forma c) y a) al igual que el ejemplo anterior.

$$3) y = \sqrt[n]{x} \quad n \text{ impar positivo } (n > 1)$$



Se aleja de la forma d) y de la forma a) simultáneamente.

ir./