

CONTENIDO

Capítulo II.3 Capacidad y Energía Eléctrica - Dieléctricos -----	2
II.3.1 Definición de capacidad eléctrica – Capacitancia-----	2
II.3.1.a Capacitor de dos esferas -----	4
II.3.1.b Capacitor de placas paralelas -----	5
II.3.1.c Cálculo general de la capacitancia de una configuración geométrica -----	8
II.3.2 Sistemas de capacitores -----	10
II.3.2.a Configuración en paralelo -----	10
II.3.2.b Configuración en serie -----	12
II.3.2.c Otras configuraciones -----	13
II.3.3 Campos eléctricos en la materia: Dieléctricos -----	15
II.3.3.a Efecto macroscópico del campo eléctrico en la materia: Polarización y la ley de Gauss en medios dieléctricos -----	16
II.3.3.b Efecto microscópico del campo eléctrico en la materia: Campo molecular y polarizabilidad -----	29
II.3.3.c El capacitor de placas paralelas con dieléctrico. Capacitores comerciales -----	36
II.3.4 Energía eléctrica -----	39
II.3.4.a Energía almacenada en un capacitor -----	39
II.3.4.b Energía almacenada en el campo eléctrico-----	41
PREGUNTAS - CAPITULO II.3-----	44
PROBLEMAS - CAPITULO II.3 -----	45

Capítulo II.3 Capacidad y Energía Eléctrica - Dieléctricos

A partir de los experimentos de Faraday, Cavendish y otros, se intuyó la posibilidad de emplear conductores y sistemas de conductores como dispositivos almacenadores de carga. Luego el mismo Faraday reconoció la importancia del papel primordial que el medio entre los conductores jugaba en este proceso. Sin embargo, no fue sino hasta muchos años después hasta que se investigó y determinó teóricamente el efecto del campo eléctrico en la materia cuando se pudo entender las causas y origen de este fenómeno. Esta investigación ha derivado en un nuevo campo de la electricidad antiguamente denominado *dielectricidad*, y también en el estudio de un nuevo conjunto de materiales denominados *dieléctricos*. El conocimiento de esta nueva área de la electricidad es de tal importancia que un curso avanzado de electricidad debería empezar más bien por tratar los materiales dieléctricos y el efecto que los campos producen en el interior de la materia en el ámbito microscópico antes de presentar las leyes de Coulomb y de Gauss. En este capítulo se tratarán ambos asuntos en un orden mas cercanamente cronológico, empezando primero por definir y conocer como se determina la capacidad eléctrica es decir, la facultad que un cuerpo o sistema puede tener para almacenar carga. De allí se puede establecer la relación con el almacenamiento de energía, para llegar a una de las conclusiones mas paradójicas de la electricidad:

La capacidad de almacenar carga de un sistema de cuerpos no depende para nada de parámetros eléctricos sino sólo de geométricos y de la constitución del medio.

Se presentará también en este capítulo con la ayuda de la teoría atómica de la constitución de la materia y de algunos resultados del capítulo precedente, un análisis semi-riguroso de cómo se originan efectos importantes cuando un campo eléctrico externo actúa en el interior de la materia.

II.3.1 Definición de capacidad eléctrica – Capacitancia

Un conductor cargado y aislado del resto del universo, es aquel que se encuentra bastante alejado de todas las demás cargas, o equivalentemente podemos decir que la carga opuesta se encuentra en el infinito. De las definiciones de campo y potencial eléctrico ecs. II.2-25 y II.2-105 se puede, para un conductor de esta naturaleza, establecer una relación directa entre la carga Q que el conductor puede poseer y el potencial eléctrico ϕ que esta carga establece en el espacio que la rodea, siendo el límite establecido sólo por el rompimiento eléctrico del medio. Para pequeñas distancias, comparadas con la distancia que separa al conductor aislado de las cargas restantes, esta relación es directamente proporcional y se puede escribir como:

$$Q = C \phi \quad (\text{II.3-1})$$

En donde la constante de proporcionalidad C viene a representar la capacidad que el conductor tiene de almacenar o condensar la carga. Si suponemos que el conductor es una esfera de radio R , se obtiene directamente de las ecs. II.2-114a y II.3-1 que la constante de proporcionalidad entre la carga y el potencial de la esfera es:

$$Q = C(K_0 \frac{Q}{R}) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{R}{K_0} \quad (\text{II.3-2})$$

Concluyéndose que la capacidad de almacenar carga depende solamente del radio de la esfera y de la constante del medio.

El caso de un conductor aislado es una situación hipotética, entonces; ¿cómo sería la relación entre la carga y el potencial para una situación real en donde sabemos que una carga no puede estar aislada?, es decir, debe existir por lo menos un par de conductores cargados.

En el capítulo anterior se estableció, mediante el teorema de la unicidad para conductores, que existe una manera única en la cual se reparten las cargas entre un sistema de conductores de forma tal que el campo eléctrico sea nulo en el interior de todos ellos. Este teorema también se puede interpretar cómo una conexión única entre la relación *carga-potencial* y la disposición geométrica de los conductores portadores de carga. En la base de este criterio se puede establecer el siguiente teorema para dos conductores, derivable del teorema de la unicidad:

Dos conductores separados de cualquier forma, que puedan pero no necesariamente, poseer cargas opuestas de igual magnitud, tienen la capacidad de almacenar carga independientemente de la carga misma, del campo y potencial eléctrico que ésta produce y depende solamente de la estructura o arreglo geométrico conformado por los conductores y del medio que los separa.

Este arreglo geométrico se conoce cómo capacitor¹ y la propiedad de almacenar la carga se denomina *capacitancia*. Nótese la similitud entre esta variable física y la conductancia del calor (véase parte I capítulo I.4) o la conductancia de un fluido hidrodinámico (véase curso de Física 11). Este tipo de variable física que es determinada por factores geométricos es común en diversas áreas de la Física en donde se presenta un flujo de materia, partículas o energía.

Procede directamente del teorema anterior y del principio de inducción electrostática que un capacitor puede ser construido en cualquiera de las dos estructuras siguientes: cargados los dos con cargas opuestas (fig. II.3-1a) o uno solo cargado mientras el otro es conectado a tierra (fig. II.3-1b).

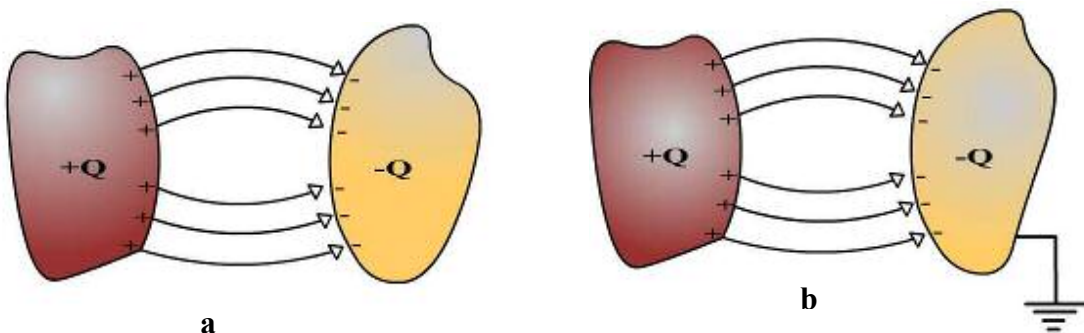


Fig. II.3-1. Capacitor a) Ambos cargados b) uno solo cargado y conectado a tierra.

¹ Antiguamente se le conocía también como condensador, pero este término ha entrado en desuso.

Es directo establecer que para un par de conductores con cargas de igual magnitud Q , por simple extensión de la ec. II.3-1 se puede escribir que la capacitancia debería estar dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} \quad (\text{II.3-3})$$

Siendo ahora $\Delta\varphi$ la diferencia de potencial entre los dos conductores. Dado que la capacitancia depende solamente de factores geométricos, por definición es una variable física siempre de magnitud positiva. Esto implica que en la aplicación de la ec. II.3-3 se debe emplear la magnitud de la carga, y la diferencia de potencial se debe evaluar como la diferencia entre el punto de mayor al punto de menor potencial. Para verificar la validez del teorema consideraremos dos estructuras geométricas simples o capacitores ya vistas en capítulos anteriores: dos esferas y dos planos paralelos ambos conductores.

Un capacitor perfecto es aquel en el cual todo el campo eléctrico, se desarrolla entre los dos conductores, de manera que todo el flujo parte de un conductor y termina en el otro. Por lo general esto no se cumple en la práctica ya que siempre se pierde parte del flujo hacia otras cargas lejanas, en particular hacia tierra. La existencia de un flujo hacia tierra desde el conductor positivo de la configuración de la figura II.3-1b, produce una capacitancia adicional denominada “*capacitancia parásita*” la cual es difícil de estimar.

II.3.1.a Capacitor de dos esferas

Supongamos dos esferas conductoras de radio R con cargas opuestas de magnitud Q y separadas a una distancia $r \gg R$ en el vacío como se presenta en la figura II.3-2. Podemos bajo esta condición considerar el potencial de cada esfera como aproximadamente el potencial correspondiente al de cada esfera aislada y dada por la ec. II.2-114a de la forma:

$$\varphi = \pm K_0 \frac{Q}{R} \quad (\text{II.3-4})$$

Así que la capacitancia vendrá dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\varphi(+Q) - \varphi(-Q)} = \frac{R}{2K_0} = \begin{cases} 2\pi\epsilon_0 R \dots MKS \\ \frac{R}{2} \dots ues - CGS \end{cases} \quad (\text{II.3-5})$$

Se observa que, de nuevo la capacitancia sólo depende del radio de las esferas y la constante del medio. Nótese también que si una esfera se coloca en el infinito se tendría el caso anterior de una esfera aislada.

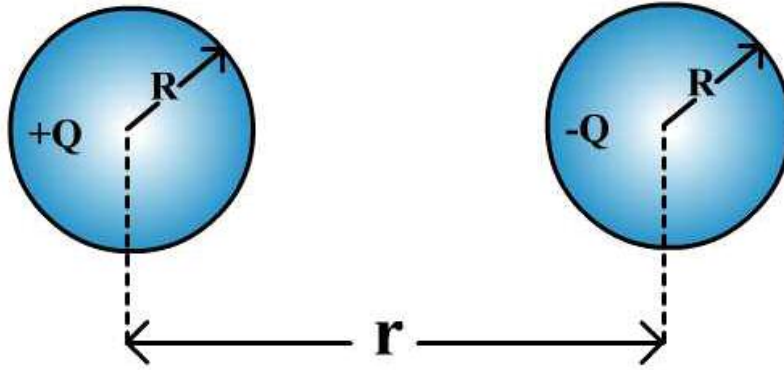


Fig. II.3-2. Capacitor de dos esferas.

II.3.1.b Capacitor de placas paralelas

Se tienen dos placas conductoras paralelas con densidades de carga de igual magnitud pero de signo opuesto en el vacío. El área de las placas es A y se encuentran separadas a una distancia d muchísimo menor que cualquiera de las dimensiones de las placas. En estas condiciones se puede asegurar que el campo eléctrico en el interior de las placas es de simetría uniforme, es decir las líneas de fuerza serían líneas perpendiculares a las placas como se ilustra en la figura II.3-3a. Esta aproximación es válida en cuanto el punto del campo esté más alejado de los bordes y cerca del centro de las placas. El campo producido por estas placas viene dado por la ec II.2-112, así que de la ec. II.2-74 la diferencia de potencial entre las placas es:

$$\Delta\varphi = - \int_{-Q}^{+Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E d = 4 \pi K_0 \sigma d \quad (\text{II.3-6})$$

La carga en las placas es $Q = \sigma A$, entonces, de la ec. II.3-3 la capacitancia de este capacitor es:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma A}{4 \pi K_0 \sigma d} = \frac{A}{4 \pi K_0 d} = \begin{cases} \frac{A}{d} \varepsilon_0 \dots \text{MKS} \\ \frac{A}{d} \dots \text{ues - CGS} \end{cases} \quad (\text{II.3-7})$$

Una vez más se obtiene como resultado que la capacitancia depende solamente de factores geométricos.

Cuando nos acercamos al borde de las placas del capacitor de placas paralelas, el campo pierde la simetría uniforme y se asemeja al campo producido por un sector puntiagudo. La combinación del campo de los dos sectores de las dos placas resulta en una simetría similar al de dos cargas puntuales de signo opuesto con una alta concentración de carga. El resultado es un efecto en el campo uniforme que se conoce como *efecto de borde* o *efecto de franjas*, el cual produce una disminución en el campo eléctrico entre las placas.

Si se toma en cuenta el efecto de borde, la capacidad real de un capacitor de placas paralelas se puede representar como:

$$C = f_b \frac{A}{4 \pi K_0 d} \quad (\text{II.3-8})$$

En donde el término $f_b \propto d/A$, representa un factor responsable del efecto de borde y el cual cumple la condición:

$$\lim_{d/A \rightarrow 0} f_b = 1 \quad (\text{II.3-9})$$

El capacitor de placas paralelas como dispositivo condensador de carga, es un arreglo comercialmente utilizado en la construcción de aparatos electrodomésticos y electrónicos. Para este fin se requiere que las placas sean conectadas mediante otro conductor al resto de los elementos que componen la parte eléctrica del aparato. Este conductor pasa a formar parte de la placa y por su forma y tamaño contribuye en aumentar la capacitancia parásita. Para evitar este efecto se emplean alambres conductores de tamaño despreciable comparados con las placas y alejados de tierra. En la figura II.3-3b se representa el capacitor de placas paralelas de forma esquemática en donde las líneas punteadas representan los alambres y se supone que se encuentran al mismo potencial de las placas.

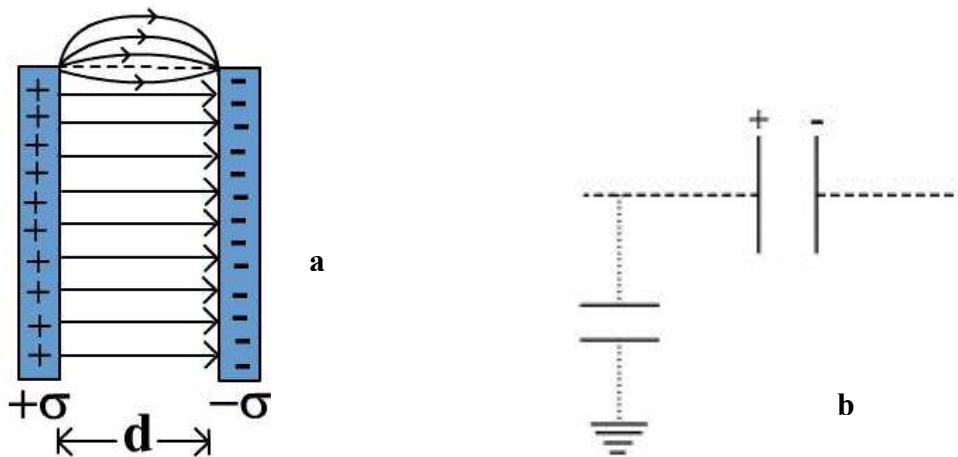


Fig. II.3-3. Capacitor de placas paralelas a) con efectos de borde, b) representación esquemática.

Unidades

En las ecuaciones II.3-5 y II.3-7 se ha empleado la definición de la constante de unidades (ec. II.1-7) para los dos sistemas más utilizados en electricidad. Se puede apreciar que además de la dependencia con factores geométricos, la capacitancia depende también de la permitividad del medio, en este caso el vacío, como un factor multiplicativo. Esta constante

también conocida como constante dieléctrica no posee unidades en el sistema ues-cgs y en el MKS posee el inverso de las unidades de la constante K_0 . Se acostumbra en el sistema MKS denominar a la unidad de capacitancia $C/V = (C \cdot T/L)^2 \cdot (1/M) = \text{Faradio (F)}$, en tanto que en el sistema ues-CGS se puede ver de las ecuaciones para las capacitancias que la unidad es equivalente a cms. Esta unidad se acostumbra denominarla stat-Faradio. Empleando las conversiones de carga y potencial respectivas, es fácil encontrar que: 1 Faradio = 9×10^{11} cms (stat-Faradios). Así que es obvio ver que la unidad de Faradio es muy grande ya que para construir un capacitor de placas paralelas de 1 faradio separadas a una distancia de 1 cm se requeriría de la ec. II.3-7 un área de $A = 4 \cdot \pi \cdot 10^9 \cdot (10^{-2}) \cong 10^9 \text{ m}^2$!! En tanto que para construir un capacitor de 1 faradio con una esfera, ésta debería poseer un radio de 18×10^9 mts !! En consecuencia para representar la capacitancia de un capacitor de dimensiones normales, cuya capacitancia sería muy pequeña, se emplean submúltiplos. En la tabla II.3-1 se indican los submúltiplos más comunes para capacitores comerciales.

Tabla II.3-1. Submúltiplos del Faradio.

Sin pensarlo mucho parecería paradójico que la capacidad de almacenar carga dependa solamente de factores geométricos y de la permitividad del medio. A fin de corroborar experimentalmente este resultado se ejecuta el montaje del experimento E.II.3-1 con un capacitor de placas paralelas, el cual consiste de dos discos de área A uno fijo cargado y conectado a un electroscopio, y otro movable a lo largo del eje de los discos y conectado a tierra. Si acercamos el disco movable desde lejana distancia se aprecia que colapsan las hojas del electroscopio. Es obvio que la carga en el electroscopio permanece constante, entonces el potencial del disco fijo debe disminuir, lo cual concuerda con el hecho de que un conductor descargado siempre disminuye el potencial de otro cargado. En consecuencia la diferencia de potencial entre los discos disminuye y por la definición de capacitancia según la ec. II.3-3, la capacitancia debe aumentar. Esto corrobora la validez de la ec. II.3-7 en cuanto a su dependencia con la distancia entre las placas. Si ahora se repite el experimento con placas de mayor área a una distancia fija, observamos que las hojas colapsan de nuevo. Invocamos de nuevo constancia de la carga y debido a una variación en la densidad de carga el electroscopio indica una disminución de la diferencia de potencial, implicando por la ec. II.3-3 un aumento de la capacitancia. Nuevamente la ec. II.3-7 corrobora esta dependencia.

Para estudiar la relación con el medio, se coloca totalmente entre las placas otro disco de un material aislante, se observa que independientemente de la naturaleza del material siempre las hojas del electroscopio colapsan. Si la carga es constante, entonces la diferencia de potencial disminuye conduciendo a un aumento de la capacitancia. Se puede entonces aseverar que un medio material entre los conductores aumenta la capacitancia con respecto al vacío. En la sección II.3-3 se justificará el origen de esta dependencia mediante el empleo de la teoría atómica de la constitución de la materia.

Exp. II.3-1. Estudio de los parámetros del capacitor de placas paralelas.

II.3.1.c Cálculo general de la capacitancia de una configuración geométrica

La capacitancia obtenida en los dos casos anteriores de configuraciones geométricas sencillas fue fácil por la determinación simple e inmediata del campo eléctrico y la diferencia de potencial. Para configuraciones geométricas asimétricas o complejas la determinación del campo eléctrico y de la diferencia de potencial es más difícil. En determinadas circunstancias se puede emplear la ley de Gauss para la determinación de la carga, de manera que de las ecs. (II.2-41) y (II.2-74), podemos escribir la definición de capacitancia de la forma:

$$C = \frac{1}{4 \pi K_0} \left[\frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{-\int_{-Q}^{+Q} \vec{E} \cdot d\vec{l}} \right] \quad (\text{II.3-9})$$

Se ve así que para la deducción de la capacitancia de una configuración geométrica de cualquier forma es crucial el conocimiento del campo eléctrico establecido en la región entre los dos conductores. Como muestra del empleo de la ec. II.3-9 se encontrará la capacitancia de dos estructuras más complejas pero que poseen simetría.

El capacitor esférico

Esta estructura geométrica consiste de dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 sostenidas por separadores aislantes de dimensiones despreciables como se señala en la figura II.3-4. Suponemos que se coloca en la esfera interna una carga positiva y en la esfera externa una negativa o bien ésta última se conecta a tierra. El campo eléctrico establecido entre las dos esferas se determina mediante la ley de Gauss y es aquel correspondiente al de la esfera interna como si toda la carga Q estuviese concentrada en su centro y dado por la ec. II.2-51; así que si ejecutamos la integración en la dirección radial desde la esfera interna hasta la externa, la capacitancia vendría, de acuerdo con la ec. II.3-9 dada por:

$$C = \frac{Q}{-\int_{R_1}^{R_2} \frac{K_0 Q}{r^2} dr} = \frac{1}{K_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{R_1 R_2}{K_0 (R_2 - R_1)} \quad (\text{II.3-10})$$

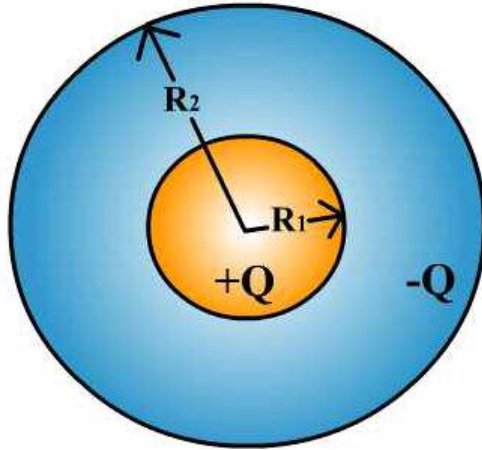


Fig. II.3-4. Capacitor esférico

El capacitor Cilíndrico

Este capacitor está conformado por dos cilindros concéntricos de radios R_1 y R_2 de la misma longitud L . El capacitor cilíndrico se encuentra por lo general en los cables coaxiales de transmisión de señales de TV y video y también en los cables submarinos.

Si consideramos que los radios son pequeños podemos considerar que los cilindros interno y externo poseen densidades de carga lineal $-\lambda$ y $+\lambda$ respectivamente. Como se indica en la figura II.3-5a, la carga que cada cilindro poseería sería $Q=\lambda \cdot L$. Si además los radios son pequeños comparados con la longitud, aplicamos la ley de Gauss a una superficie gaussiana como la de la figura II.3-5b, se obtendría que el campo eléctrico poseería simetría radial y vendría dado por la ec. II.2-59. Entonces la capacitancia de acuerdo con la ec. II.3-9 sería:

$$C = \frac{\lambda L}{-\int_{R_1}^{R_2} \frac{2 K_0 \lambda}{r} \cos 180^\circ dr} = \frac{L}{2 K_0 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (\text{II.3-11})$$

Ya que se ha considerado la longitud muy grande para emplear simetría radial, se acostumbra manejar la capacitancia por unidad de longitud:

$$C/L = \frac{1}{2 K_0 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (\text{II.3-12})$$

La dependencia de la capacitancia con sólo factores geométricos de las dos configuraciones geométricas presentadas, es una vez más evidente. Por lo tanto, la capacitancia de una configuración geométrica de cualquier complejidad se puede expresar como:

$$C = \frac{1}{4 \pi K_0} [F_G] \quad (\text{II.3-13})$$

En donde F_G representa el factor geométrico y el cual comprende todos los parámetros que determinan la geometría de la configuración.

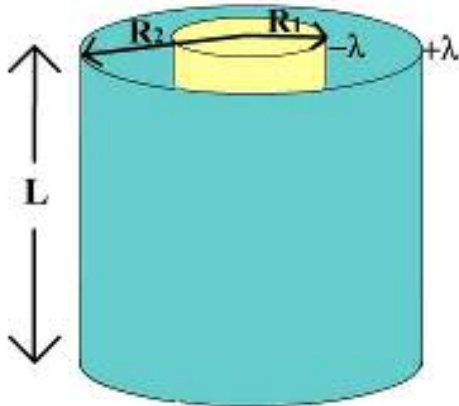


Fig. II.3-5. Capacitor cilíndrico visto en perspectiva

II.3.2 Sistemas de capacitores

La resolución del problema de la redistribución de la carga en un sistema de n conductores cuando se afectan mutuamente la distribución de sus cargas es un problema complejo. Aún en esta situación complicada sigue siendo válido el teorema de la unicidad para n conductores. Un cambio en la carga de un conductor traerá como consecuencia una variación en la carga de otro(s) conductor(es), como resultado habrá un cambio equivalente en la diferencia de potencial, pero con la característica de que no habrá variación en la forma relativa en que se distribuyen las cargas en la estructura en equilibrio. Por otra parte, si se tiene un sistema de $2n$ conductores y el cual está conformado por n capacitores y la capacitancia de cada uno depende de la estructura geométrica, entonces es de esperar que la capacitancia del sistema dependerá a su vez de la forma como se acomoden estos capacitores unos con respecto a los otros. En la base de este criterio un sistema de n capacitores se puede, bajo ciertas condiciones presentar en dos configuraciones sencillas principales: paralelo y en serie. Mediante estas dos configuraciones se pueden resolver una gran diversidad de configuraciones susceptibles de ser descompuestas en combinaciones serie-paralelo. En lo sucesivo se supondrá que los capacitores se pueden unir mediante hilos conductores que no forman parte ni afectan la configuración geométrica conformando así lo que se conoce como un circuito de capacitores.

II.3.2.a Configuración en paralelo

En determinadas configuraciones es posible descomponer la geometría de la estructura en un conjunto de capacitores de capacitancias conocidas. Supongamos que se tiene un sistema de n capacitores el cual es construido de forma que, mediante hilos conductores, todas las placas positivas están unidas al mismo punto de potencial positivo. De la misma forma todas las placas negativas están unidas al mismo punto de potencial negativo o

tierra. Esta estructura que de forma esquemática se muestra en la figura II.3-6a y de forma real en la figura II.3-6b se conoce como configuración en paralelo. Es de suponer, tal como se señaló anteriormente, que los hilos conductores señalados con líneas punteadas, no producen diferencias de potencial y son de dimensiones mínimas comparadas con las placas. Así que no juegan un papel importante dentro del análisis del sistema. Se pretende entonces determinar si es posible asignar a este sistema una capacitancia única o también denominada *capacitancia equivalente*, es decir, como si se tuviese equivalentemente un solo capacitor con una capacitancia igual a la del sistema y determinar la relación con las capacitancias conocidas.

Por cuanto consideramos a los hilos conductores perfectos; entonces, todos los capacitores están sometidos a la misma diferencia de potencial $\Delta\phi$. Al colocar una cantidad de carga Q , esta cantidad se distribuye entre todas las placas. Así que la carga q_i que cada capacitor de capacitancia C_i conocida adquiere, viene dada de acuerdo con la ec. II.3-3 por:

$$q_i = \Delta\phi C_i \quad \forall \quad i = 1 \dots n \quad (\text{II.3-14})$$

La carga total del sistema viene determinada según el principio de conservación de la carga por la suma algebraica de todas las cargas; así que de acuerdo con la ec. II.3-14 se tendrá que;

$$Q = \sum_i^n q_i = \sum_{i=1}^n \Delta\phi C_i = \Delta\phi \sum_{i=1}^n C_i \quad (\text{II.3-15})$$

Despejando se obtiene una expresión equivalente a la ec. II.3-3 para la definición de una capacitancia única de la forma:

$$\frac{Q}{\Delta\phi} = \sum_{i=1}^n C_i = C_e \quad (\text{II.3-16})$$

De esta expresión se concluye que:

La capacidad equivalente de la configuración en paralelo corresponde a un capacitor de capacitancia igual a la suma algebraica de las capacitancias individuales

Es obvio que la capacitancia equivalente de una configuración en paralelo es siempre mayor que cualquiera de las capacitancias individuales. Esto justifica porqué se construye un capacitor de una pila de capacitores en paralelo, como en la figura II.3-6a, para obtener un capacitor de alta capacitancia que no ocupa mucho espacio.

Tal como se discutió en la sección II.3-1b los hilos conductores afectan el sistema produciendo una capacitancia parásita, sin embargo, dado que el flujo parásito de los conductores hacia tierra conforma una capacitancia en paralelo con el capacitor, entonces siendo ésta pequeña, y por el carácter aditivo, se torna despreciable en comparación con la capacitancia total.

En algunas configuraciones geométricas es posible descomponer las placas de forma compleja pero separadas a una distancia L , en un conjunto de elementos de

capacitores de placas paralelas de diferencial de área dA en una configuración en paralelo, cada uno con una capacitancia diferencial dado por la ec. II.3-7 de la forma;

$$dC = \frac{dA}{4 \pi K_0 L} \quad (\text{II.3-17})$$

En estas condiciones se puede por la ec. II.3-15, considerar la capacitancia de la configuración como constituida por la suma algebraica de estos elementos diferenciales de capacitores de forma que la capacitancia equivalente se puede expresar como la integral:

$$C_e = \frac{1}{4 \pi K_0} \int \frac{dA}{L} \quad (\text{II.3-18})$$

Si la distancia L es fija se tiene un conjunto de elementos de capacitores de placas paralelas en paralelo.

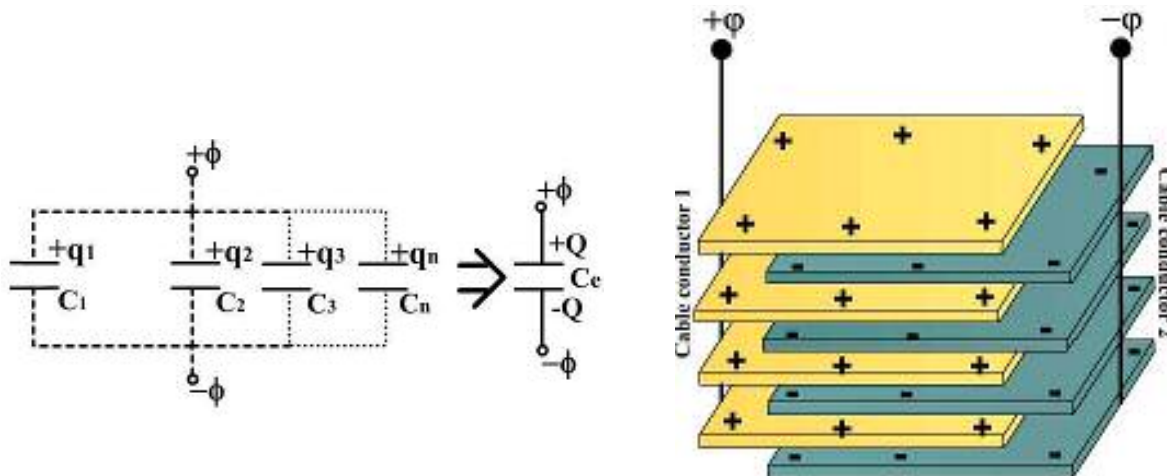


Fig. II.3-6. Sistema en paralelo a) esquemático b) en la realidad.

II.3.2.b Configuración en serie

Un sistema de n capacitores de capacitancias conocidas, cuyas placas se conectan mediante hilos conductores uno a continuación del otro en forma de cascada, conforman lo que se conoce como configuración en serie. Para esta configuración es factible asignar una capacitancia única o *capacitancia equivalente*. Si como se muestra en las figuras II.3-6a (esquemática) y II.3-6b (real), las placas extremas de esta configuración inicialmente descargadas se conectan a las fuentes de carga positiva y negativa, es evidente que existirá una cadena de inducciones electrostáticas de la placa de un capacitor hacia la del siguiente. Entonces, la carga entre dos placas consecutivas debe ser igual y de signo opuesto, para que de acuerdo con el principio de conservación de la carga ésta se conserve nula en las placas interconectadas. Si denominamos Q la magnitud de la carga en cada placa, la diferencia de potencial existente entre las placas de cada capacitor es;

$$\Delta\varphi_i = \frac{Q}{C_i} \quad \forall i = 1 \dots n \quad (\text{II.3-19})$$

Por el principio de superposición, los potenciales así como las diferencias de potenciales entre las placas, son aditivas para proporcionar la diferencia de potencial total del sistema $\Delta\phi$; así que de II.3-19 se tiene que:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{Q}{C_i} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad \forall i = 1 \dots n \quad (\text{II.3-20})$$

Despejando se obtiene:

$$\frac{\Delta\varphi}{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_e} \quad (\text{II.3-21})$$

Se concluye entonces que:

El inverso de la capacitancia equivalente de la configuración en serie corresponde a un capacitor igual a la suma algebraica de los inversos de las capacitancias individuales

En antagonismo a la aditividad algebraica de las capacitancias en paralelo, la aditividad de los inversos de las capacitancias en serie, resulta en una capacitancia equivalente menor que cualquiera de las capacitancias individuales. He aquí porqué la capacitancia parásita crea una gran dificultad técnica en la construcción de un capacitor a partir de un conjunto de capacitores en serie en un espacio reducido.

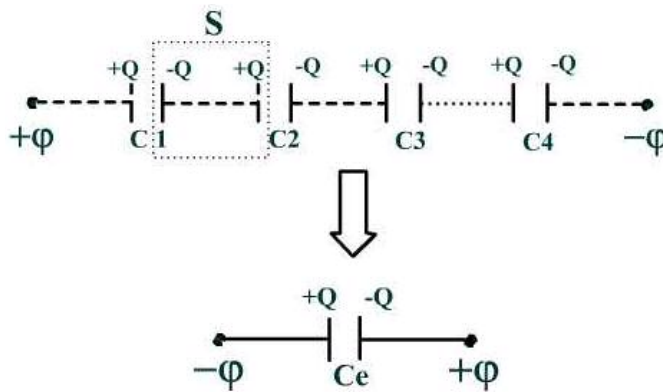


Fig. II.3-7. Configuración en serie a) esquemática b) real

II.3.2.c Otras configuraciones

Una gran diversidad de sistemas de capacitores están conformados por configuraciones que resultan de combinaciones serie-paralelo de las configuraciones anteriormente presentadas. Estas configuraciones pueden ser descompuestas en conjuntos separados serie y paralelo

cuando son analizadas desde “*adentro hacia fuera*”. Es decir, comenzando por el más interno que pueda ser identificable se descompone el conjunto como una configuración serie o paralelo; y así se procede hacia el más externo hasta reducir la descomposición a una sola capacitancia equivalente. En la figura II.3-8 se presenta un sistema el cual se puede descomponer de la siguiente manera:

- 1) Englobados en líneas punteadas se puede identificar dos conjuntos en paralelo: C_1 , C_2 y C_3 forman una capacitancia equivalente C_{e1} ; C_5 y C_6 forman otra capacitancia equivalente C_{e2} .
- 2) Englobados en líneas segmentadas se puede identificar dos conjuntos en serie: C_4 y C_{e1} forman una capacitancia equivalente C_{e3} ; C_7 y C_{e2} forman otra capacitancia equivalente C_{e4} .
- 3) Englobado en líneas punteadas-segmentadas C_{e3} y C_{e4} forman un conjunto en paralelo del cual finalmente se obtiene la capacitancia equivalente del sistema.

Otras combinaciones serie-paralelo más complejas se presentan en los problemas.

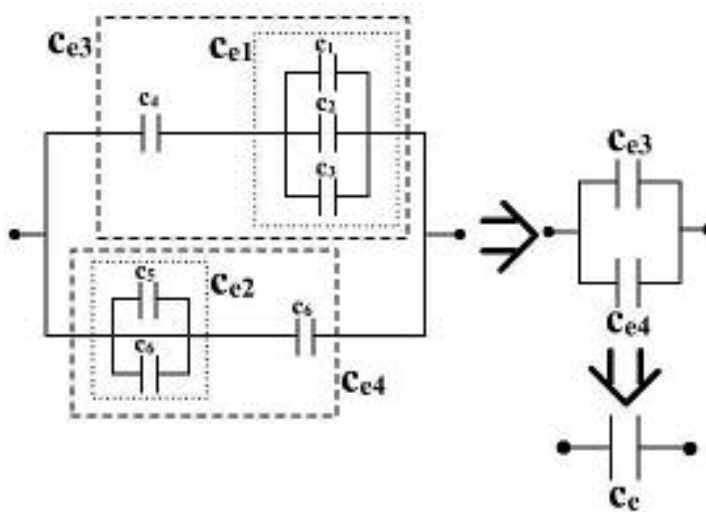


Fig. II.3-8. Configuración serie-paralelo

Otra configuración de capacitores, comúnmente utilizada para la determinación de capacitancias desconocidas, es el puente de Wheastone mostrado en la figura II.3-9. Esta configuración no puede ser descompuesta en una combinación serie-paralelo. Sistemas de capacitores que no pueden ser descompuestos en combinaciones serie-paralelo serán considerados en el capítulo II.4 cuando se presenten los capacitores como partes de un circuito eléctrico en condiciones no-electrostáticas, es decir, cuando las cargas son móviles.

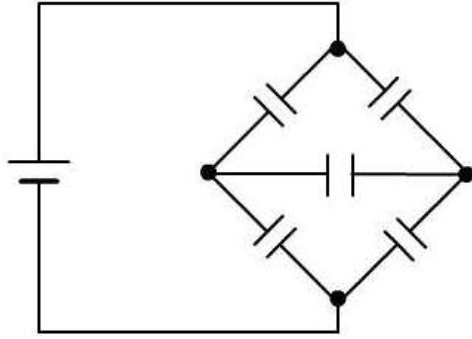


Fig. II.3-9. Puente de Wheastone

II.3.3 Campos eléctricos en la materia: Dieléctricos

El efecto del campo eléctrico en la materia puede ser considerado desde dos puntos de vista: macroscópico y microscópico. Desde el primer punto de vista el efecto se visualiza como un desplazamiento global limitado, macroscópico y continuo de la carga negativa con respecto a la positiva. De esta manera se crean densidades de carga superficial y volumétrica en el material el cual se dice que está *polarizado* y posee una *polarización neta*. Según el punto de vista microscópico ocurre un desplazamiento relativo de las cargas negativa y positiva a escala atómica y/o molecular, creándose así dipolos inducidos y permanentes. Mediante argumentaciones de la teoría atómica y molecular se puede proceder a mostrar como se origina de forma discreta una polarizabilidad atómica y molecular y de allí la polarización neta que se manifiesta macroscópicamente

La materia en su estado natural imperturbable por la acción de cuerpos cargados o campos eléctricos permanece en estado neutro y sin separación de cargas. En el ámbito microscópico aún cuando el átomo posee electrones de carga negativa revoloteando alrededor del núcleo, vista la órbita en un plano, la posición promedio de estos electrones sería en el centro del átomo. Podría decirse que el centro de masa y el centro de carga coinciden. Esto es una mera suposición o aproximación ya que los campos eléctricos producidos por agentes externos siempre están presentes en cualquier medio, los que podríamos denominar campos eléctricos ambientales. Sin embargo, los campos producidos por cuerpos cargados muy alejados podemos asumir que son muy débiles y pueden ser despreciados. En consecuencia se puede aseverar que el átomo en su estado normal alejado de todos los demás átomos se puede considerar aislado, posee carga nula, no posee separación de cargas y por lo tanto no existen dipolos. Esta situación se presenta en los materiales aislantes, aún en la presencia de un campo eléctrico de magnitud normal, tal cómo se ha considerado en los dos capítulos previos. Existen una gran diversidad de materiales que aún cuando se pueden considerar como aislantes, cuando se encuentran bajo la acción de un campo eléctrico, aún de pequeña magnitud, presentan una separación microscópica de cargas, pero notable y mesurable a escala macroscópica, es decir existe una inducción electrostática microscópica formándose dipolos. Estos materiales reciben el nombre de dieléctricos ya que como veremos en esta sección significa la presencia de dos tipos de cargas las cuales podemos asociarlas a dos tipos de electricidad. Para el átomo,

ésta separación de cargas fundamentalmente involucra al electrón por un lado y al núcleo por el otro.

Se tiene claro entonces que los átomos y moléculas de un dieléctrico crean dipolos los cuales producen una polarización macroscópica que tiene como efecto primordial la reducción del campo eléctrico en la materia. El siguiente paso en el estudio electrostático es determinar el campo eléctrico en el interior de un material polarizado por la acción de campos externos. Sin embargo, en este proceso se confronta una situación recurrente o recursiva ya que parte del campo eléctrico en el medio es producido por el medio mismo a través de la polarización, la cual a su vez es dependiente del campo en el medio. Para complicar las cosas el efecto externo de este campo en el dieléctrico es a su vez alterar el campo externo distante.

II.3.3.a Efecto macroscópico del campo eléctrico en la materia: Polarización y la ley de Gauss en medios dieléctricos

Cualquiera que sea la índole de la generación de la polarización podemos considerar a un dieléctrico bajo un campo eléctrico externo como una serie de dipolos alineados en la dirección del campo como se muestra en la figura II.3-10. Si tomamos una superficie gaussiana S se puede ver que las cargas en el volumen del cuerpo se cancelan quedando un conjunto superficial de cargas de signos opuestos en cada superficie del dieléctrico opuesta al campo. Entonces resulta una densidad superficial de carga de polarización en cada cara del dieléctrico. Sin embargo, sabemos que todo el volumen del dieléctrico está polarizado por un elevado número de dipolos, así que también se puede considerar que existen densidades volumétricas de carga ρ_+ y ρ_- de los dipolos. Por lo tanto, el efecto del campo eléctrico sobre el dieléctrico se puede analizar y describir mediante la densidad superficial de carga de polarización y mediante la densidad de carga volumétrica de los dipolos en todo el volumen. Esta carga se denomina regularmente “carga ligada” ya que no puede desplazarse mas de una distancia atómica, pero también se le denomina “carga ficticia” ya que desaparece cuando se remueve el campo eléctrico. La carga ligada debe distinguirse de la carga de un solo signo que adquiere el dieléctrico por otros medios por contacto u otro procedimiento, la cual de ahora en adelante la denominaremos *libre*, sin que esto signifique que tenga movimiento.

Siguiendo un procedimiento originalmente propuesto por Poisson se considera primero la distribución volumétrica de dipolos. Si el momento de cada dipolo es p_i , el momento total producido por todos los dipolos es:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N p_i \quad (\text{II.3-22})$$

siendo N el número de dipolos.

Ya que se considera una distribución volumétrica de dipolos, de forma similar a como se definió la densidad de carga volumétrica, se puede dentro de un volumen τ definir una densidad de dipolos con un momento dipolar por unidad de volumen:

$$\vec{P} = \frac{\vec{M}}{\tau} \quad (\text{II.3-23})$$

Este concepto también se le denomina polarización neta o total. Pero como se considera que los dipolos macroscopicamente se distribuyen de forma continua, entonces para un elemento $d\tau$ de volumen del dieléctrico, el momento dipolar es:

$$d\vec{M} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N p_i = \vec{P} d\tau \quad (\text{II.3-24})$$

Si el número de fuentes de dipolos por unidad de volumen es $n=N/\tau$ y suponemos que todos los dipolos poseen la misma carga y separación δl ; entonces, la polarización neta también se puede escribir como:

$$\vec{P} = n \vec{M} = n q \delta l \quad (\text{II.3-25})$$

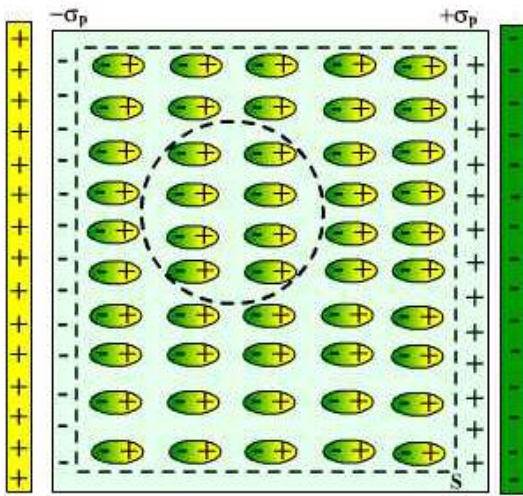


Fig. II.3-10. Polarización macroscópica

Se concluye entonces que el efecto de un campo eléctrico externo en el interior de un dieléctrico es en primer término crear una polarización equivalente al momento dipolar volumétrico. Para determinar las consecuencias macroscópicas se determinará el potencial y el campo producidos por esta polarización. De la ec. II.2-¿? el potencial producido por un número de dipolos discretos es:

$$\varphi = K_0 \frac{\vec{u}_r \cdot \sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} = -K_0 \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{\nabla}_R \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \right) \quad (\text{II.3-26})$$

Si la densidad de dipolos es elevada aún cuando ésta es en esencia discreta se puede considerar continua; así que, de la ec. II.3-24 la sumatoria se convierte en una integral de la forma:

$$\varphi = -K_0 \iiint \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_R \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \right) d\tau(r) \quad (\text{II.3-27})$$

En donde el subíndice R en el gradiente significa que las derivadas se toman con respecto a esta variable. Pero como la integración se realiza en la variable r en donde están localizados los dipolos, entonces, se debe transformar el gradiente a esta variable mediante:

$$\frac{\vec{u}_r}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} = -\vec{\nabla}_R \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \right) = \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \right) \quad (\text{II.3-28})$$

Mediante la ec. A-xx del apéndice matemático se tiene que:

$$\vec{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) = \frac{\vec{\nabla}_r \cdot \vec{P}}{r} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{r} \right) \quad (\text{II.3-29})$$

Así que la integral II.3-27 se puede descomponer en dos:

$$\varphi = K_0 \left[\iiint \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau - \iiint \frac{\nabla_r \cdot \vec{P}}{r} d\tau \right] \quad (\text{II.3-30})$$

En lo sucesivo omitiremos el subíndice r quedando entendido que el gradiente se ejecuta en la misma coordenada de integración.

Empleando el teorema de Green (véase sección II.2-6) la integral de volumen se puede convertir en una integral de superficie para obtener que el potencial en el dieléctrico se puede escribir como:

$$\varphi = K_0 \iint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{r} - K_0 \iiint \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{r} d\tau \equiv K_0 \iint_S \frac{\sigma_P dS}{r} - K_0 \iiint \frac{\rho_P d\tau}{r} \quad (\text{II.3-31})$$

Esta expresión indica que el potencial resultante de todos los dipolos, o mejor dicho la polarización, corresponde a la acción combinada de:

Una distribución superficial de carga con densidad de carga;

$$\sigma_p = \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{dS} = P_n \quad (\text{II.3-32a})$$

y carga ligada superficial:

$$q_{pS} = \int \sigma_p dS = \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int P_n dS \quad (\text{II.3-32b})$$

Una distribución volumétrica de carga con densidad de carga;

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (\text{II.3-33a})$$

y carga ligada volumétrica:

$$q_{pV} = \iiint_V \rho_p d\tau = -\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d\tau = -\iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.3-33a})$$

En donde se ha empleado de nuevo el teorema de la divergencia. Obsérvese que las ecuaciones II.3-32-33 corroboran lo que expresa la ec. II.3-23, esto es, las unidades de la polarización son Carga/área

La carga total ligada en todo el volumen del dieléctrico debido a la polarización es;

$$q_{pT} = \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \iiint_V (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau = 0 \quad (\text{II.3-34})$$

Nótese que por el teorema de la divergencia en el segundo término, esta carga total es nula.

Para corroborar este resultado matemático analizaremos físicamente como ocurre la separación de carga. De la ec. II.3-25 la polarización en la superficie se puede escribir como:

$$\sigma_p = P_n dS = \vec{P} \cdot d\vec{S} = n q \delta l dS \quad (\text{II.3-35})$$

En la superficie asociamos una densidad de carga σ_p a la cual le ocurre un desplazamiento de carga δl , podemos asociar al volumen de dipolos una densidad volumétrica de carga, así se puede decir que:

$$n q \delta l = \rho \delta l = \sigma_p \quad (\text{II.3-36})$$

De las ecs. II.3-35-36 se deduce la igualdad dada por la ec. II.3-32a. esto es, $\sigma_p = P_n$. Ahora bien, si existe una distribución de momentos dipolares en el volumen del dieléctrico fuera de la superficie, entonces existe una carga volumétrica en el dieléctrico. La carga ficticia en la superficie es proveniente de un flujo desde el interior en el dieléctrico, el cual representa una pérdida de carga. Dado que el dieléctrico es neutro se puede decir que ésta pérdida corresponde al negativo de la divergencia de la polarización.

De la misma forma como se encontraron las leyes de la electrostática en el vacío (vistas en los capítulos II.1 y II.2), se puede ahora derivar y formular las leyes de la electrostática para dieléctricos tal como el teorema de Gauss, tanto en forma integral como diferencial.

Forma Integral

Para formular el teorema de Gauss en su forma integral tomamos dentro del dieléctrico una superficie gaussiana que lo cubra de forma que abarque todas las cargas libres (q_L) y ligadas (q_{PS} , q_{PV}), como se muestra en la figura II.3-11. De forma similar a la ec. II.2-41, el teorema de Gauss para estos dos tipos de carga se puede escribir como:

$$\Phi = \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{4\pi K_0} = \sum_{i=1}^N q_i = q_L + q_{PS} + q_{PV} = q_L + \int_{S_G} \vec{P} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_G} \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.3-37})$$

La primera integral por ser una superficie que no cubre la superficie del dieléctrico no aporta contribución y resulta ser nula, en tanto que la segunda es una superficie que encierra sólo parte del volumen del dieléctrico. Al colocar las unidades respectivas para cada sistema y re-arreglando términos se obtiene que:

$$\oint \left(\vec{E} + 4\pi \vec{P} \right) \cdot d\vec{S} = 4\pi q_L \dots \text{ues} - CGS \quad (\text{II.3-38})$$

$$\oint \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) \cdot d\vec{S} = q_L \dots MKS \quad (\text{II.3-39})$$

El término vectorial entre paréntesis se define como:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (\text{II.3-40})$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{II.3-41})$$

Mediante esta definición se obtiene la ley de Gauss para dieléctricos como:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi \sum q_{Li} & \dots \text{ues} - CGS \\ \sum q_{Li} & \dots MKS \end{cases} \quad (\text{II.3-42})$$

Esta expresión no se puede expresar en una forma unificada aplicable a cualquiera de los dos sistemas siguiendo la terminología para la constante K_0 de unidades de capítulos anteriores.

Forma Diferencial

El teorema de Gauss en forma diferencial para dieléctricos requiere que se incluya, además de la densidad de carga volumétrica libre, la contribución volumétrica de las cargas ligadas que toman en cuenta la polarización expresada por la ec. II.3-33a. Por lo tanto, la ec. II.2-65 para un medio dieléctrico se escribiría como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4 \pi K_0 \left[\rho_L - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right] \quad (\text{II.3-43})$$

Re-arreglando los términos se obtiene para los dos sistemas de unidades;

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{E}}{K_0} + 4 \pi \vec{P} \right) = 4 \pi \rho_L \quad (\text{II.3-44})$$

Si definimos de nuevo el vector entre paréntesis por la ec. II.3-42 se tiene la ley de Gauss en forma diferencial para dieléctricos:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \begin{cases} 4 \pi \rho_L & \dots \text{ues} - CGS \\ \rho_L & \dots MKS \end{cases} \quad (\text{II.3-45})$$

Fig. II.3-11. Superficie gaussiana para dieléctricos.

J. C. Maxwell interpretó este resultado matemático desde un punto de vista Físico suponiendo que cuando un campo eléctrico actúa en un medio ocurre un desplazamiento de electricidad similar a como ocurre en conductores pero de forma controlada y limitada y denominó al vector D : *desplazamiento eléctrico*. Se puede decir que este vector toma en cuenta la relación entre el campo eléctrico en el medio y la polarización. Esta teoría originalmente propuesta por Maxwell como teoría del desplazamiento eléctrico constituye hoy día lo que se conoce como *Teoría Clásica del Campo Electromagnético*. En 1898 J. C. Maxwell propone en su teoría electromagnética que la polarización en un medio puede ser producida tanto por campos electrostáticos como variantes en el tiempo presentes en una onda electromagnética², trayendo como principal consecuencia la existencia de una permitividad y una disminución de la propagación de la onda en el medio.

² El ejemplo más conocido de una onda electromagnética es la luz visible en el rango de longitud de onda 4000-7000 Å.

Sin entrar en detalles en algunas situaciones particulares que consideraremos en la siguiente sección, la polarización vista macroscópicamente aparece en un dieléctrico siempre que sobre éste actúe un campo eléctrico, entonces es aparente que si despreciamos el efecto de los dipolos mismos, la polarización es creada sólo por el campo en el medio. Es un hecho experimental que la polarización es directamente proporcional al campo eléctrico. Si se tiene un material dieléctrico en el cual todas las propiedades eléctricas son las mismas en cualquier dirección en el medio, entonces se tiene un *dieléctrico isotrópico*. Para este tipo de material es lógico suponer que la polarización y el campo eléctrico en el medio son paralelos, es decir, poseen la misma dirección. Tomando en cuenta que la polarización se expresa en Carga/área pero el campo eléctrico se expresa diferente en los dos sistemas de unidades, entonces la proporcionalidad directa entre polarización y campo eléctrico es de la forma simple:

$$\vec{P} = \chi \begin{cases} \vec{E} & \dots \text{ues} - CGS \\ \epsilon_0 \vec{E} & \dots MKS \end{cases} \quad (II.3-46)$$

En donde la constante de proporcionalidad adimensional denominada *susceptibilidad eléctrica*, se define de forma diferente en los dos sistemas y puede llegar a depender del campo eléctrico. Materiales que obedecen esta ley se denominan dieléctricos lineales o ideales.

De la relación II.3-46 podemos ahora encontrar una relación vectorial solo entre el campo eléctrico y el vector desplazamiento eléctrico. Para ello reemplazamos la ec. II.3-46 en II.2-40,41 para obtener en los dos sistemas:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4 \pi \chi \vec{E} = (1 + 4 \pi \chi) \vec{E} = \epsilon_r \vec{E} \quad \dots \text{ues} - CGS \quad (II.3-47a)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \dots MKS \quad (II.3-47b)$$

En estas ecuaciones se han definido dos nuevas constantes:

La *constante (permitividad) dieléctrica relativa* (adimensional) de uso mayoritario en el sistema ues-CGS como:

$$\epsilon_r = (1 + 4 \pi \chi) \quad (II.3-48a)$$

y la *constante (permitividad) dieléctrica absoluta* (en unidades de ϵ_0), de uso mayoritario en el sistema MKS como:

$$\epsilon = (1 + \chi) \epsilon_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (II.3-48b)$$

De esta última definición se deduce la relación entre las dos constantes dieléctricas en el sistema MKS como:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + \chi) \quad (\text{II.3-48c})$$

Nótese como las ecs. II.3-48 corroboran la diferencia en definición tanto de \mathbf{D} como \mathbf{P} en los dos sistemas de unidades, resultando que la constante χ es diferente y ϵ_r es la misma en ambos sistemas. Esto explica la aparente paradoja como estos vectores en el sistema ues-CGS son equivalentes al campo eléctrico, y en el sistema MKS son el producto de una constante dimensional por el campo. Sin embargo, se debe tener claro que en ambos sistemas de unidades poseen las mismas unidades: carga/área. Las constantes dieléctricas aquí definidas están referidas con respecto a campos electrostáticos y por lo tanto son mejor conocidas como *constantes dieléctricas estáticas*. Si los campos son variantes entonces las constantes adquieren un valor diferente y se les denominan *constantes dinámicas*.

Si se emplean las definiciones II.3-48 en la ec. II.3-46 se puede expresar la polarización en ambos sistemas también de la forma:

$$\vec{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{4\pi K_0} \vec{E} \quad (\text{II.3-49})$$

La constante ϵ_r es la constante fundamental a partir de la cual se derivan las otras constantes, por lo tanto es la que usualmente se reporta en las tablas de datos y referencias. En la tabla II.3-2 se muestran los valores de esta constante para los materiales dieléctricos de uso más común desde un punto de vista tecnológico. Los valores son presentados con 6 cifras significativas a temperatura ambiente (20-25 °C) a menos que se indique lo contrario. El valor para el vacío es exactamente 1. La mayoría de los materiales poseen una constante ϵ_r que varía desde cercanamente a 1 hasta alrededor de 100. En los gases la constante no difiere mucho de la unidad hasta la tercera cifra decimal; pero, en líquidos y sólidos puede adquirir valores bastante alejados de la unidad. Esto es debido en parte al movimiento térmico aleatorio y en parte al alto grado de libertad de las moléculas en un gas.

Gases	Constante	Rigidez (kV/m)	Líquidos	Constante	Rigidez (kV/m)
Aire	1.000590	3x10 ³	Agua	78.74	
Argón	1.000545		Acetona	20.7	
Neón	1.000127		Aceite de Castor	4.67	
Helio	1.000065		Aceite de Transformador	2.22	12x10 ³
Oxígeno	1.000523				
Nitrógeno	1.000580				
Dióxido de Carbono	1.000985				
Sólidos	Constante	Rigidez (kV/m)	Sólidos	Constante	Rigidez (kV/m)
Parafina	2.20	10 ⁴	Ambar	2.65	

Vidrio Pyrex	4.2- 6.0		Asfalto	2.26	
Cuarzo fundido	3.75-4.1		Mica	2.5-7.0	10 ⁵
Caucho	2-3.5	4x10 ⁴	Porcelana		10 ⁴
Poliestireno	2.4-2.75	2x10 ⁴			

Tabla II.3-2. Constantes dieléctricas relativa y rigidez dieléctrica.

Los dieléctricos reales presentan varias propiedades características que entre otros comportamientos se reflejan en una dependencia de la polarización eléctrica con el tiempo, fenómeno conocido como *relajación dieléctrica*. Sin embargo, la mayoría de los comportamientos de los dieléctricos reales se refleja en una dependencia más compleja con el campo eléctrico que aquella dada por las ecs. II.3-46,49; en cuyo caso se dice que el dieléctrico no sigue una relación lineal con el campo eléctrico. Por ejemplo, a campos moderados la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} puede ser cuadrática, cúbica o de mayor orden. Pero también puede ocurrir que la susceptibilidad eléctrica se torne dependiente del campo eléctrico. Cuando el campo eléctrico es muy elevado los electrones de la última capa ligados al átomo o aquellos que participan en los enlaces moleculares están sujetos a una enorme fuerza eléctrica, por lo cual pueden adquirir libertad de movimiento convirtiendo al dieléctrico en un conductor. Bajo estas circunstancias se dice que ocurre *rompimiento dieléctrico*. Entonces, se define *rigidez dieléctrica* como:

“Magnitud mínima del campo eléctrico necesario para que aparezca el rompimiento dieléctrico”

La rigidez dieléctrica depende de varios factores en el material tales como: constitución atómica/molecular, espesor, temperatura, humedad y por supuesto del rango de magnitud del campo eléctrico. Por ello, los valores de la rigidez dieléctrica para algunos materiales que se reportan en la tabla II.3-2 son aproximados. El rompimiento dieléctrico debe ser evitado a toda costa ya que produce deterioro y posiblemente daño permanente en el dieléctrico tales como: corona, chispa y hasta perforaciones. En el capítulo II.2 se proporcionó la magnitud del rompimiento dieléctrico del aire seco, el cual actúa más como un aislante.

Las ecs. II.3-39,40 para el vector desplazamiento eléctrico y la ley de Gauss en dieléctricos tanto en su forma integral como diferencial indican según Maxwell que es \mathbf{D} y no \mathbf{E} el vector campo que desempeña el rol fundamental. Como consecuencia de esto las propiedades eléctricas más importantes de los medios dieléctricos vendrán determinadas por el vector \mathbf{D} . A continuación se hará una revisión de otras leyes, teoremas y definiciones.

1) Representación gráfica del vector \mathbf{D}

La tangente a las líneas de desplazamiento eléctrico representan el vector de desplazamiento eléctrico y vienen determinadas por la ecuaciones diferenciales obtenidas mediante una expresión similar a la ec. II.2-¿?;

$$\frac{dx}{D_x} = \frac{dy}{D_y} = \frac{dz}{D_z} \quad (\text{II.3-50})$$

2) Ley de Coulomb

Dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas a una distancia r_{12} en un medio dieléctrico de constante dieléctrica ϵ_r se repelen con una fuerza;

$$\vec{F} = K_0 \frac{q_1 q_2}{\epsilon_r r_{12}^2} \quad (\text{II.3-51})$$

De modo que la fuerza de Coulomb en un medio dieléctrico se reduce por un factor $1/\epsilon_r$.

3) Ecuaciones de Poisson y Laplace

De las ecuaciones II.2-83 y II.3-47 se obtiene que:

$$\vec{D} = -\epsilon_r \nabla \varphi \quad \dots \text{ues} - CGS \quad (\text{II.3-52a})$$

$$\vec{D} = -\epsilon \nabla \varphi \quad \dots MKS \quad (\text{II.3-52b})$$

Empleando ahora la ley de Gauss diferencial (ec. II.3-45) se obtiene que:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{4 \pi K_0 \rho_L}{\epsilon_r} = \begin{cases} -\frac{4 \pi \rho_L}{\epsilon_r} & \dots \text{ues} - CGS \\ -\frac{\rho_L}{\epsilon} & \dots MKS \end{cases} \quad (\text{II.3-53a})$$

Obviamente la ecuación de Laplace se obtiene cuando no existen cargas libres.

De forma similar la ley de Gauss en su forma integral y diferencial se puede re-escribir para dieléctricos isotrópicos cuando la ec. II.3-46 es aplicable como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4 \pi K_0 \left(\frac{q_{LTi}}{\epsilon_r} \right) = \begin{cases} \frac{4 \pi q_{LTi}}{\epsilon_r} & \dots \text{ues} - CGS \\ \frac{q_{LTi}}{\epsilon} & \dots MKS \end{cases} \quad (\text{II.3-53b})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{4 \pi K_0 \rho_L}{\epsilon_r} = \begin{cases} \frac{4 \pi \rho_L}{\epsilon_r} \\ \frac{\rho_L}{\epsilon} \end{cases} \quad (\text{II.3-53c})$$

Todas estas ecuaciones confirman que el efecto primordial del dieléctrico ideal es disminuir la carga libre por un factor equivalente a la constante dieléctrica ϵ o ϵ_r según sea el sistema de unidades.

4) Condiciones de Frontera

En la mayoría de los problemas electrostáticos en medios dieléctricos, los diferentes campos escalares y vectoriales se resuelven mediante la ecuación de Poisson y Laplace para dieléctricos. Las metodologías de solución de estas ecuaciones requieren que se conozcan las condiciones de frontera al alcanzar los campos la interfase entre los diferentes medios. Por otra parte los conocimientos de esta condiciones de frontera son de gran utilidad para la determinación de parámetros tales como: constantes dieléctricas y capacitancias. Para la derivación de las condiciones de frontera se consideran dos medios de constantes dieléctricas relativas ϵ_{r1} y ϵ_{r2} . Como se muestra en la figura II.3-12a comenzamos por considerar de forma general que los vectores campo y desplazamiento eléctrico inciden y se refractan oblicuamente. Para un medio dieléctrico ideal es lógico suponer que el campo eléctrico debe ser conservativo. En consecuencia la circulación del campo eléctrico debe ser nula. Para saber que le sucede al campo eléctrico en la interfase aplicamos entonces la ec. II.2-80 al camino ABCD de la figura II.3-12 el cual consiste de un rectángulo con los tramos largos tangenciales a los dieléctricos y los cortos perpendiculares a la interfase. Para este camino se obtiene que:

$$\vec{E}_1 \cdot \Delta l_T + \vec{E}_2 \cdot \Delta l_T + \vec{E}_1 \cdot \Delta l_{\perp} + \vec{E}_2 \cdot \Delta l_{\perp} = 0 \quad (\text{II.3-54})$$

Para poder evaluar el campo eléctrico justo en la interfase los tramos cortos deben ser los mas pequeños posible. Así que en el límite $\Delta l_{\perp} \rightarrow 0$ se tiene que:

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot \Delta l_T = 0 \quad (\text{II.3-55})$$

De donde se deduce que:

$$E_{1T} = E_1 \text{ Sen } \theta_1 = E_{2T} = E_2 \text{ Sen } \theta_2 \quad (\text{II.3-56})$$

Esta expresión conocida como ley de refracción del campo eléctrico significa que:

“La componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar la interfase entre dos medios dieléctricos”.

Esta condición de continuidad es equivalente a una condición de continuidad en el potencial a través de la interfase (ver problemas).

Las condiciones de frontera para el vector desplazamiento eléctrico pueden ser deducidas mediante la ley de Gauss en dieléctricos. Para alcanzar este objetivo tomamos como superficie gaussiana un cilindro achatado de sección transversal A y longitud L el cual atraviesa la interfase como se muestra en la figura II.3-12b. Los vectores desplazamiento eléctrico los consideramos oblicuos y suponemos que existe una densidad de carga libre en la interfase tanto superficial como volumétrica. Entonces, por aplicación de la ec. II.3-41 se obtiene que:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = (D_{1n} - D_{2n}) A = \begin{cases} 4 \pi (\sigma A + \rho A L) \dots \text{ues - CGS} \\ (\sigma A + \rho A L) \dots \text{MKS} \end{cases} \quad (\text{II.3-57})$$

En donde se han denotado mediante D_{1n} y D_{2n} como las componentes normales a la interfase del vector desplazamiento eléctrico dadas por la ec. II.3-42 o forma compacta para ambos sistemas. Similar al caso anterior la condición se quiere determinar justo en la interfase; es decir, la superficie gaussiana debe incluir solo el área en la interfase. Por lo tanto, el cilindro debe ser de longitud mínima, así que, en el límite $L \rightarrow 0$ el volumen del cilindro tiende a cero y se puede considerar que la carga volumétrica es nula, obteniéndose de II.3-57 que:

$$D_{1n} - D_{2n} = D_1 \cos \theta_1 - D_2 \cos \theta_2 = \begin{cases} 4 \pi \sigma & \dots \text{ues} - CGS \\ \sigma & \dots MKS \end{cases} \quad (\text{II.3-58})$$

Esta ecuación tiene como significado:

“La discontinuidad o variación de vector desplazamiento eléctrico a través de la interfase es equivalente a la densidad de carga superficial libre”

Si se emplea la forma explícita de las ecs. II.3-40,41 se obtiene una condición de frontera para \mathbf{E} y \mathbf{P} en ambos sistemas de la forma:

$$\frac{E_{n1} - E_{n2}}{K_0} = 4 \pi [(P_{n2} - P_{n1}) + \sigma] \quad (\text{II.3-59})$$

Una expresión equivalente se puede encontrar en términos de las constantes dieléctricas para ambos sistemas mediante II.3-47.

En el caso particular de que $\sigma=0$ se tiene que:

$$D_{1n} = D_1 \cos \theta_1 = D_{2n} = D_2 \cos \theta_2 \quad (\text{II.3-60})$$

Si las magnitudes del vector \mathbf{D} se expresan en términos de las constantes dieléctricas mediante las ecs. II.3-47, la ec. II.3-60 se reduce a:

$$\varepsilon_{r1} E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_{r2} E_2 \cos \theta_2 \quad \dots \text{ues} - CGS \quad (\text{II.3-61a})$$

$$\varepsilon E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon E_2 \cos \theta_2 \quad \dots MKS \quad (\text{II.3-61b})$$

y la ec. II.3-59 para ambos sistemas se reduce a:

$$\frac{E_{n1} - E_{n2}}{K_0} = 4 \pi (P_{n2} - P_{n1}) \quad (\text{II.3-61c})$$

De las ecs. II.3-56, 61a-b se obtiene la ley de refracción del desplazamiento eléctrico:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \quad (\text{II.3-62})$$

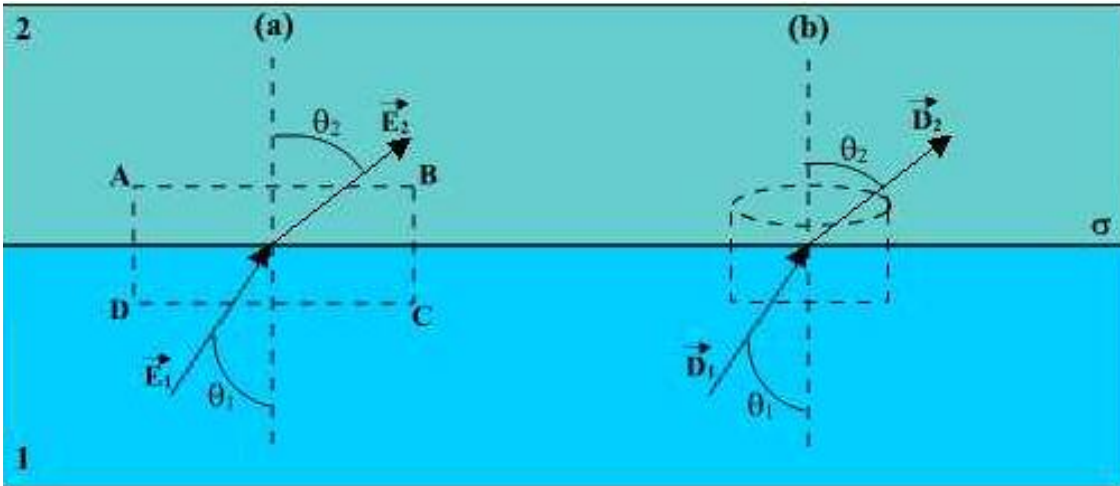


Fig. II.3-12. Campos vectoriales en una interfase

Para comprender como se aplican estas condiciones de frontera y los resultados a los cuales conduce consideraremos dos casos particulares de interfase ya conocidos: conductor en el vacío y dieléctrico en el vacío.

Conductor en el vacío

Supongamos que el medio 2 es un conductor y el medio 1 es el vacío. Nótese que de la ec. II.3-56 $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$, de forma que la componente tangencial es continua a través de la interfase y nula en ambos medios tal como requiere un conductor. Sabemos que para un conductor el campo eléctrico interno es nulo, entonces $E_{n2} = D_{n2} = 0$, también en el medio 1 $\epsilon_{r1} = 1$; así que de las ecs. II.3-47 y 58 se obtiene para los dos sistemas:

$$D_{1n} = \begin{cases} 4 \pi \sigma \dots \text{ues - CGS} \\ \sigma \dots \text{MKS} \end{cases} \Rightarrow E_{n1} = 4 \pi K_0 \sigma \quad (\text{II.3-63})$$

Corroborándose los que sabíamos acerca de un conductor tal como se discutió en el capítulo II.2.

- a) El campo eléctrico es normal a la superficie del conductor
- b) La discontinuidad en la componente normal del campo eléctrico está determinada por la densidad de carga libre en la superficie

Dieléctrico en el vacío

Si el primer medio es el vacío y el segundo un dieléctrico de constante relativa ϵ_r , $P_{1n} = 0$, $D_{1n} = E_{1n}$ (ues-CGS), $D_{1n} = \epsilon_0 \cdot E_{1n}$ (MKS). Si suponemos que no hay carga libre, entonces $\sigma = 0$ y de la ec. II.3-61c se tiene que:

$$E_{n1} - E_{n2} = 4 \pi P_{n2} \quad (\text{II.3-64})$$

Esta ecuación establece que:

“La discontinuidad en el campo eléctrico en una interfase dieléctrico-vacío es equivalente a la polarización en el dieléctrico y la cual es deducible de un análisis físico de la relación carga-campo”.

El establecimiento de las condiciones de frontera para el potencial y sus derivadas son condiciones o requisitos para encontrar las soluciones de la ecuación de Poisson. Estos son procedimientos seguidos en textos más avanzados y no serán tratados en esta obra; sin embargo, estas condiciones son equivalentes a la continuidad de los vectores campo y desplazamiento eléctrico respectivamente (ver problemas).

La determinación del origen del campo eléctrico en un medio material es uno de los métodos en Física más difíciles y complejos basado en procedimientos matemáticos complicados tratados sólo en textos más avanzados de la electricidad y la electrodinámica; los cuales no serán abordados en esta obra básica. Sin embargo, con el fin de proporcionar una idea del origen de algunos de las conclusiones y resultados más interesantes de los fenómenos dieléctricos, en la sección siguiente se considerará una explicación semi-cuantitativa de la polarización en el ámbito molecular. El resultado del análisis a este nivel trae como consecuencia dos causas primarias de los fenómenos de la dielectricidad: la polarizabilidad y el campo molecular.

II.3.3.b Efecto microscópico del campo eléctrico en la materia: Campo molecular y polarizabilidad³

Cuando un campo eléctrico actúa sobre la materia, a escala microscópica es lógico considerar primero cual sería el efecto sobre el átomo como un ente individual. Sin pérdida de mucha Física del átomo, se puede considerar a éste como una nube de electrones consistente de los más externos⁴, girando en órbitas cercanamente circulares alrededor del núcleo puntual en un radio aproximadamente 100.000 veces mayor que el diámetro del núcleo y éste a su vez es 2000 veces más masivo que el electrón. Es entonces fácil entender que la acción de un campo eléctrico sobre el átomo se reflejará mayormente en la nube de electrones la cual actúa como un apantallamiento del núcleo, trayendo como resultado que éste permanecerá imperturbable y la nube sufrirá una notable modificación. El efecto del campo eléctrico resulta así en una alteración de la nube electrónica la cual como se muestra en la figura II.3-13 en primer orden se podría considerar como un simple desplazamiento de la órbita electrónica hacia el origen del campo, pero en realidad ocurre una deformación de la órbita la cual deja de ser simétrica alrededor del núcleo. Esto deriva a su vez en un desplazamiento promedio del centro de carga con respecto al centro de masa, es decir, la carga negativa de la nube electrónica y la positiva del núcleo (número de electrones Z_e) están en promedio separadas por una distancia δl . Se genera así un dipolo eléctrico atómico de magnitud de carga Z_e y con un momento dipolar eléctrico atómico dado por:

$$\vec{p} = Z_e e \delta \vec{l} \quad (\text{II.3-65})$$

³ Dada la complejidad de este tópico, esta sección puede ser omitida o su lectura postergada.

⁴ Los electrones más internos distribuidos en capas, se encuentran fuertemente ligados al núcleo, por lo que no son afectados por campos eléctricos de magnitud normal.

Este dipolo a su vez afectará el medio siendo el efecto primordial una disminución del campo eléctrico externo en el medio. El efecto de separar cargas a nivel microscópico se denomina *Polarización atómica* y cuando ésta ocurre por el desplazamiento lineal de las cargas se denomina *Polarización por desplazamiento*. En el caso particular de que ésta ocurra sólo en electrones se denomina *Polarización por desplazamiento electrónico*. Cuando el campo eléctrico se desconecta o se elimina, los electrones vuelven a sus órbitas simétricas. Por ejemplo el átomo de Argón sujeto a un fuerte campo eléctrico posee un momento dipolar electrónico de 1.81×10^{-18} esu·cm, si suponemos un electrón desplazado se tendría una distancia entre los centros de carga de 0.38 Å . Compárese con el radio iónico del Ar el cual es de 0.97 Å.

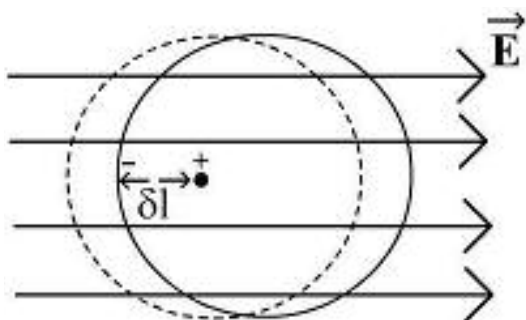


Fig. II.3-13. Polarización electrónica por desplazamiento

Cuando dos o más átomos se acercan e interactúan para formar una molécula, es bien conocido que los átomos por su afinidad o necesidad de electrones y a fin de alcanzar una estructura estable, comparten o entregan electrones de su última capa para estructurar el enlace que mantiene a los átomos unidos. Es así obvio que la polarización no está restringida al átomo, también se presenta en el ámbito molecular denominándose *Polarización molecular* producida por el enlace. El enlace puede ser covalente, es decir por compartimiento de electrones en cuyo caso en promedio los electrones no pertenecen a uno u otro átomo. Así, se puede aseverar que no existe un desplazamiento electrónico y en consecuencia no hay dipolos moleculares y no aparece una polarización por desplazamiento producida por las fuerzas eléctricas involucradas en el enlace.

La simetría de los átomos juega también un papel determinante en la polarización de la molécula; por ejemplo, puede ocurrir que aún cuando la molécula posea momento dipolar entre un par de átomos el momento dipolar neto de la molécula es nulo. Las moléculas que no presentan polarización molecular perceptible aún en la presencia de un campo eléctrico externo moderado se denominan *moléculas no-polares*. No obstante, debe quedar claro que a campos extremadamente altos cualquier molécula se polarizará irremisiblemente, en este caso la molécula no-polar adquiere un momento dipolar inducido el cual desaparece cuando el campo eléctrico se elimina. En la figura II.3-14 se muestran unos ejemplos de moléculas no-polares tales como: N_2 , CO_2 .

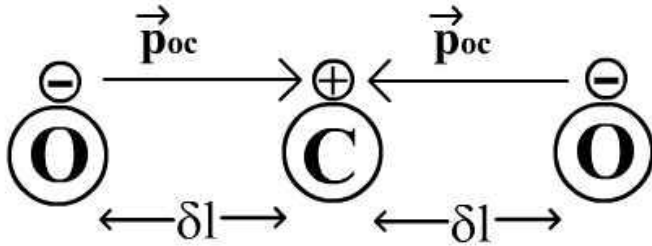


Fig. II.3-14. Ejemplos de moléculas no-polares

En cambio si el enlace es iónico, es decir ocurre una transmisión de electrones de un átomo a otro; entonces existe un desplazamiento electrónico trayendo la aparición de una polarización molecular originada por el enlace. En este caso el desplazamiento de los electrones provoca que uno o más de los átomos de la molécula queden con deficiencia de electrones adquiriendo una carga positiva en tanto que los átomos que reciben los electrones poseerán un exceso y adquirirán una carga negativa, esto es, aparece un dipolo molecular. Se dice entonces que la molécula se polariza y pasan a denominarse *moléculas polares* pues adquieren un momento dipolar molecular permanente originado por el enlace. Este momento dipolar permanente puede ser direccional o consistente de la suma vectorial entre dos o más dipolos. En un material dieléctrico consistente de moléculas polares bajo un campo eléctrico nulo en equilibrio a una temperatura T con su medio ambiente, los dipolos moleculares permanentes se comportan de forma similar a las moléculas de un gas. Esto es, se encuentran en un estado de movimiento térmico caótico, los vectores dipolares están al azar por lo cual no existe una orientación preferencial de los dipolos moleculares. Como resultado el material no posee un momento dipolar neto ni una polarización neta. Por lo contrario, una molécula polar en la presencia de un campo eléctrico externo, por lo presentado en la sección II.2-11 se deduce que, en primer término se ejerce un torque sobre el dipolo molecular permanente el cual tiende a alinear el vector momento dipolar con el campo eléctrico. A Este proceso de alineación se le opone el movimiento molecular produciendo una oscilación de los dipolos alrededor de la dirección del campo eléctrico externo. Como resultado de esta alineación el material poseerá un momento dipolar neto, es decir una polarización neta. En segundo término, si el campo eléctrico es elevado, se puede aumentar el momento dipolar permanente de las moléculas polares por la polarización por desplazamiento. Cuando el campo eléctrico es removido el movimiento térmico caótico desordena de nuevo los dipolos moleculares. En la figura II.3-15 se muestran unos ejemplos de moléculas polares tales como: HCl , H_2O , NH_3 .

Existen algunos materiales en los cuales los dipolos interactúan de una forma organizada o cooperativa que conduce a una tendencia de los dipolos en alinearse mutuamente en la ausencia de un campo eléctrico externo. Estos materiales poseerán entonces una polarización permanente y se denominan ferroeléctricos. En otros materiales los dipolos después de alinearse con el campo eléctrico externo permanecen orientados aún después de remover el campo externo. Estos materiales se denominan electretos.

La explicación de la polarización basada en la existencia de dos enlaces extremos que dan origen a dos posibilidades de moléculas polares y no-polares es simple. No es estrictamente aplicable en muchas moléculas ya que existen una diversidad de enlaces que

se determinan por un grado de covalencia o de ionicidad y esto da origen a una gama de grados de polarización, pero esto es materia de textos especializados en el tema.

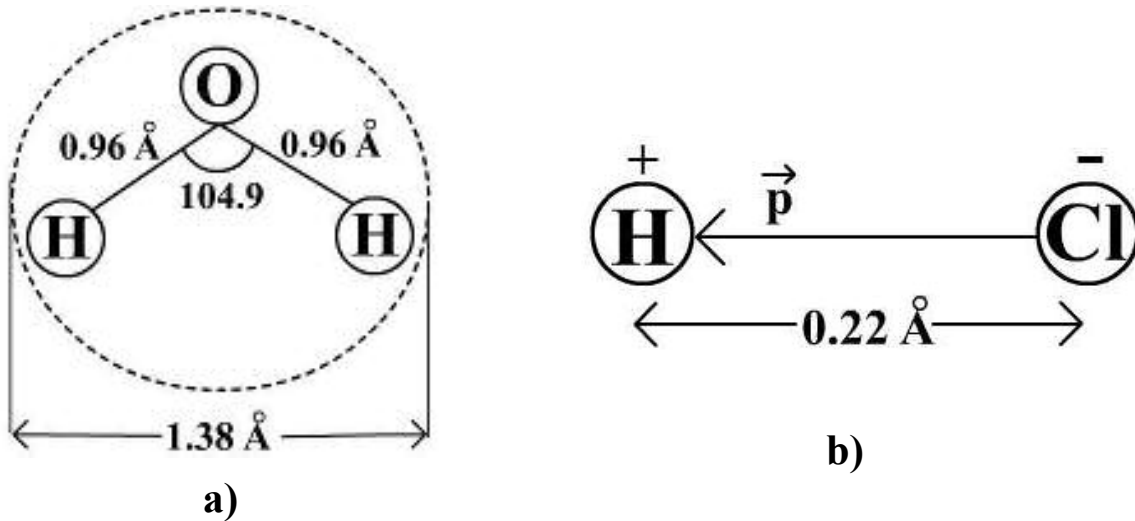


Fig. II.3-15. Ejemplos de moléculas polares a) H_2O , b) HCl

En un sólido pueden presentarse además de las anteriores polarizaciones, otras derivadas de las interacciones entre muchos átomos. Los diferentes mecanismos de producción de polarización que se pueden presentar en un dieléctrico sólido se engloban en cuatro procesos: 1) Polarización electrónica 2) Polarización iónica 3) Polarización orientacional de dipolos, 3) Polarización por cargas espaciales. En la figura II.3-16 se muestra como ocurre la polarización de acuerdo a estos mecanismos bajo un campo eléctrico externo; y en la figura II.3-17 se presenta la dependencia con la frecuencia del campo y el orden de magnitud de los diferentes mecanismos de polarización.

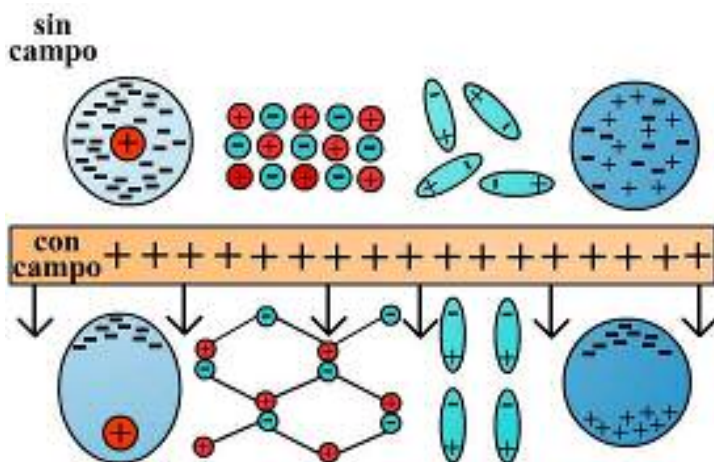


Fig. II.3-16. Mecanismos de polarización de un sólido bajo un campo eléctrico.

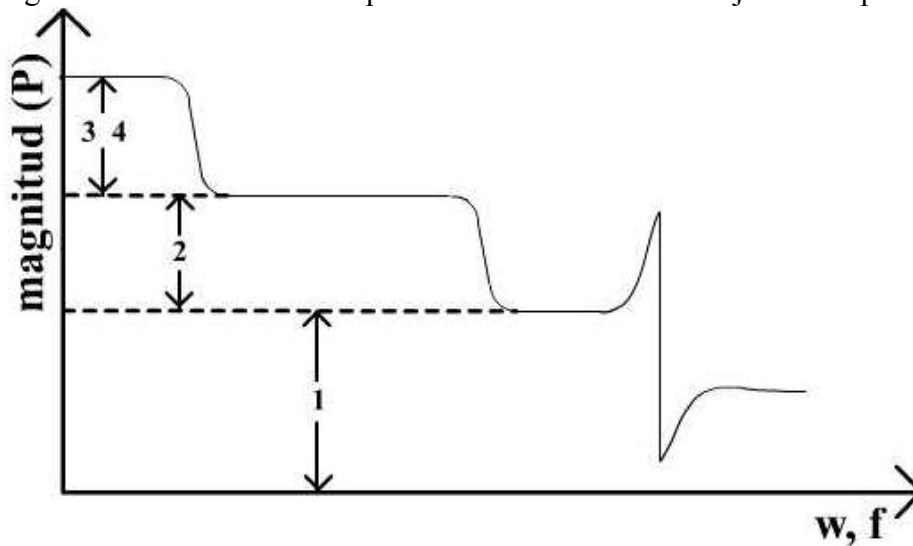


Fig. II.3-17. Dependencia con la frecuencia y orden de magnitud de la polarización.

Para culminar el estudio y análisis de las propiedades de los dieléctricos sólo resta por determinar cuál es el campo en el medio. Ya se mencionó al comienzo de ésta sección la complejidad en este procedimiento debido a la situación recurrente en el campo. El campo eléctrico en el medio debe incluir no sólo aquél debido a todas las fuentes externas sino también el campo debido a todas las moléculas polarizadas el cual a su vez depende del primero. Una clarificación y denominación acerca de los campos es imperativa antes de seguir adelante. El campo responsable de la polarización de las moléculas es un campo microscópico y se denominará de ahora en adelante: *campo molecular, local o efectivo E_m* que actúa sobre las moléculas. Este campo no puede ser el mismo que el campo macroscópico E que determina el carácter lineal de las ecs. II.2-46,47. Sin embargo, en gases a presiones bajas y en algunos líquidos, las moléculas están suficientemente separadas tal que sus interacciones pueden ser despreciadas; en consecuencia, el campo dipolar que unas producen sobre las otras puede ser despreciado en comparación con el campo externo. De aquí que, se puede asegurar que en un gas el campo local y el externo son idénticos.

Además de la dificultad anterior se presenta otra por la manera cómo se ha definido el campo en el capítulo II.2. Si se quiere determinar el campo en un medio el cual de acuerdo a la ec. II.2-2 se define como la fuerza que se ejerce sobre una carga de prueba, se requeriría un espacio vacío en el medio para colocar la carga de prueba; pero entonces ésta ya no estaría en el medio. Esto trae como consecuencia un dilema, el cual se resuelve mediante la siguiente aproximación.

Se considera una cavidad en el dieléctrico de dimensiones moleculares, la cual rodea el punto en donde se quiere determinar el campo molecular de forma que el medio se divide en una cavidad y el resto del dieléctrico. El campo eléctrico en el dieléctrico cerca de la cavidad ahora puede ser considerado como la suma de una parte no perturbada antes de introducir la cavidad la cual viene representada por un medio continuo, más el efecto de la cavidad el cual viene representado por los dipolos de las moléculas de forma discreta. Sin embargo si las dimensiones de esta cavidad son muy pequeñas entonces su efecto perturbador es despreciable y el campo fuera de la cavidad es justamente el campo en el

dieléctrico el cual queremos determinar. Al existir una cavidad en el medio obviamente se requerirá la aplicación de condiciones de frontera en la interfase cavidad-medio lo cual trae como resultado que cavidades de formas diferentes producirán relaciones diferentes entre los campos vectoriales. No obstante, bajo ciertas aproximaciones se puede demostrar que el campo es cercanamente independiente del tamaño de la cavidad.

Consideraremos a manera de ejemplo una de las cavidades mas comunes y esperadas cuando se tiene un dieléctrico en el campo uniforme de unas placas paralelas como en la figura II.3-10: una cavidad esférica. El campo dentro de la cavidad puede ser determinado en términos del campo macroscópico mediante la resolución de la ecuación de Poisson en la interfase medio-cavidad. Sin embargo, este procedimiento entraña complejos métodos matemáticos de la Física tratados sólo en textos más avanzados y no serán analizados aquí. En vez de ello seguiremos un método más sencillo basado en el análisis de las cargas ligadas. Al aislar la cavidad como se ilustra en la figura II.3-18 el medio dieléctrico externo a la cavidad viene a estar representado por las polarización o cargas ligadas. En tanto que la esfera viene a estar representada por una densidad de carga superficial en la superficie interna que produce una polarización P_n . Es posible demostrar (ver problemas) que la contribución a la polarización por el material dentro y fuera de la cavidad se cancelan lo cual garantiza que el introducir una cavidad no tiene efecto en la polarización del medio. Si despreciamos por ahora la contribución de los dipolos que se encontrarían en el interior de la cavidad misma, se puede aseverar que el resto del dieléctrico produce en la cavidad esférica un campo eléctrico molecular E_m que es igual a:

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \vec{E}_C \quad (\text{II.3-66})$$

El campo E_C es el producido por las cargas ligadas o polarización P_n en la superficie interna de la cavidad. No es difícil demostrar (ver problemas) que éste campo está determinado por la polarización macroscópica del medio dieléctrico y dada para ambos sistemas por:

$$\vec{E}_C = \frac{4 \pi K_0 \vec{P}}{3 \epsilon_0} \quad (\text{II.3-67})$$

Así que la ec. II.3-66 queda en la forma:

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{4 \pi K_0 \vec{P}}{3} \quad (\text{II.3-68})$$

Reemplazando en esta ecuación la expresión II.3-49 para la polarización se obtiene que la relación entre el campo molecular y el campo en el dieléctrico es de la forma:

$$\vec{E}_m = \frac{(\epsilon_r + 2)}{3} \vec{E} \quad (\text{II.3-69})$$

Si por el contrario despejamos de II.3-49 el campo en el dieléctrico en términos de la polarización se tiene que la relación entre la polarización y el campo molecular para ambos sistemas sería:

$$\vec{P} = \frac{3}{4 \pi K_0} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \vec{E}_m \quad (\text{II.3-70})$$

De la misma forma como macroscópicamente se relaciona la polarización con el campo eléctrico en el medio, se puede desde un punto de vista microscópico relacionar el momento dipolar asociado a la molécula con el campo molecular. Así, si suponemos que por cada molécula se tiene un dipolo, entonces de acuerdo con la teoría molecular de la polarizabilidad, el momento dipolar de una molécula es directamente proporcional al campo molecular, esto es;

$$\vec{p}_m = \alpha \vec{E}_m \quad (\text{II.3-71})$$

En donde la constante α representa la polarizabilidad molecular o respuesta de la molécula a la acción polarizante del campo molecular. Ya que existe un dipolo por cada molécula, entonces la concentración de dipolos N también representa la concentración de moléculas y por consiguiente se tiene que la polarización vendría dada en términos de la polarizabilidad como:

$$\vec{P} = N \vec{p}_m = N \alpha \vec{E}_m \quad (\text{II.3-72})$$

Igualando las ecuaciones II.3-70 y II.3-72 se encuentra una relación entre las constantes microscópica y la macroscópica, es decir, entre la polarizabilidad y la constante dieléctrica para ambos sistemas de la forma:

$$\alpha = \frac{3}{4 \pi K_0 N} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \quad (\text{II.3-73})$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de Clausius-Mosotti. Obsérvese en un todo de acuerdo con la ecuación II.3-71 que las unidades de α son las de área.

La inclusión del término dipolar debido a las moléculas dentro de la cavidad da origen a una contribución microscópica que se manifiesta de forma discreta. Esta contribución trae como consecuencia una dependencia de la polarizabilidad con la temperatura, efecto el cual es muy importante para comprender otros fenómenos dieléctricos y la aplicación de la polarizabilidad como una herramienta para el estudio de la estructura molecular. Estos temas son tratados en textos avanzados de Física del Estado Sólido y Molecular.

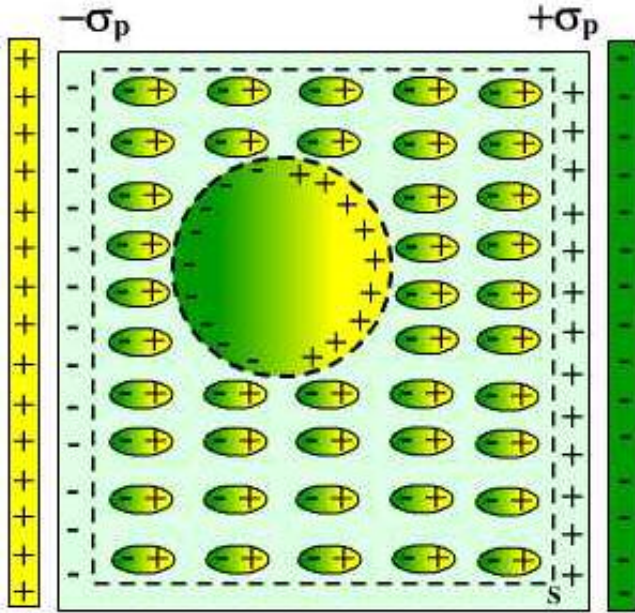


Fig. II.3-18. Cavidad esférica en un medio dieléctrico.

II.3.3.c El capacitor de placas paralelas con dieléctrico. Capacitores comerciales

En la sección II.3-1b se obtuvo de forma experimental como el medio aumenta la capacitancia del capacitor. Es un hecho experimental encontrado por Cavendish y Faraday que la capacidad de un capacitor depende no sólo de su geometría y arreglo de los conductores sino también de la naturaleza del medio material entre los conductores. Experimentos posteriores realizados por Faraday en 1838 comprueban hallazgos de que la capacidad de un condensador con un medio dieléctrico es alterada con respecto en el vacío por un factor que es independiente de la geometría y depende solamente de las propiedades del medio dieléctrico. Faraday denominó la razón entre las capacidades con y sin dieléctrico: *capacidad inductiva o específica*.

Como ejemplo didáctico e histórico del efecto de un dieléctrico en las propiedades eléctricas consideraremos el caso del capacitor de placas paralelas de la sección II.3-1b con un medio dieléctrico entre la placas de constante dieléctrica relativa ϵ_r . Al introducir un dieléctrico sin producir ningún otro cambio es obvio que la carga en las placas seguirá siendo la misma, pero además de la variación en la capacitancia ocurrirán cambios importantes en el potencial, campo y desplazamiento eléctrico entre las placas. Supondremos que el dieléctrico posee la misma área de las placas y un espesor t y el espacio restante, el aire, lo podemos considerar como el vacío. Las variaciones en los potenciales de las diferentes interfases serán entonces como se indica en la figura II.3-19. Se crean densidades de carga superficial ligada $+\sigma_p$ y $-\sigma_p$ en las interfases aire-dieléctrico correspondientes a la polarización en el medio. Dado que el dieléctrico es ideal, es decir isotrópico y homogéneo, entonces la uniformidad del campo no debería ser alterada. Por lo tanto, por ésta continuidad las líneas del campo y el desplazamiento eléctrico serían como se indica en la figura II.3-19. Nótese la disminución del campo y la continuidad del

desplazamiento eléctrico en el medio. La determinación de todos los parámetros eléctricos para este caso se deja al lector como ejercicio (ver problemas), para facilidad de cálculo supondremos ahora que el dieléctrico llena todo el espacio entre las placas de separación d . El hecho de que el dieléctrico esté en contacto con las placas metálicas no significa que las cargas se cancelan ya que las cargas ligadas no se pueden desplazar. Para establecer las diferencias denotamos por Q la carga libre en las placas de forma que la densidad de carga libre es $\sigma=Q/A$. Denotaremos por $E_0, \Delta\phi_0$ y C_0 y $E_D, \Delta\phi_D$ y C_D como el campo, diferencia de potencial y capacidad eléctrica antes y después de introducir el dieléctrico respectivamente.

Mediante la aplicación de la ley de Gauss y el vector desplazamiento en el dieléctrico, ecs. II.3-42, 47, se obtiene que la carga viene dada por:

$$Q = \frac{\epsilon_r A E_D}{4 \pi K_0} \quad (\text{II.3-74})$$

El campo eléctrico producido por las placas metálicas antes de introducir el dieléctrico está dado por las ecs. II.3-6 y II.2-112; así que II.3-74 también se puede escribir como:

$$E_D = \frac{4 \pi K_0 \sigma}{\epsilon_r} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (\text{II.3-75})$$

Este resultado pudo haberse obtenido también por aplicación de las condiciones de frontera en la interfase placa metálica-dieléctrico.

La diferencia de potencial entre las placas con dieléctrico también puede ser determinada por la ec. II.2-74, obteniéndose junto con el potencial antes de introducir el dieléctrico, ec. II.3-6 y II.3-75 que;

$$\Delta\phi = - \int_{-Q}^{+Q} \vec{E}_D \cdot d\vec{l} = E_D d = \frac{E_0 d}{\epsilon_r} = \frac{\Delta\phi_0}{\epsilon_r} \quad (\text{II.3-76})$$

Mediante la aplicación de las ecs. II.3-74-76 en II.3-3 en se obtiene que la capacitancia con dieléctrico es:

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi_D} = \frac{\epsilon_r A}{4 \pi K_0 d} = C_0 \epsilon_r \quad (\text{II.3-77})$$

Es importante observar que la capacidad inductiva definida por Faraday es precisamente la constante dieléctrica relativa del medio.

La magnitud de la polarización y la correspondiente densidad de carga ligada se obtiene de la ec. II.3-49 como:

$$P = \frac{(\epsilon_r - 1)}{4 \pi K_0} E_D = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{E_0}{4 \pi K_0} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \sigma = \sigma_p \quad (\text{II.3-78})$$

Resultado que indica como la magnitud de la carga ligada es tan solo una pequeña fracción menor que la de las placas en tanto mayor sea la constante dieléctrica.

Si se suman las densidades de carga adyacentes en la interfase placa-dieléctrico se obtiene en un todo de acuerdo con las ecs. II.3-53 que:

$$\sigma_T = \sigma - \sigma_p = \frac{\sigma}{\epsilon_r} \quad (\text{II.3-79})$$

Todos estos resultados determinan en el capacitor de placas paralelas que:

El efecto de un dieléctrico es reducir la densidad de carga total, el campo y el potencial eléctrico y aumentar la capacitancia por un factor equivalente a la constante dieléctrica relativa

Si en vez de mantener la carga constante se mantiene mediante un dispositivo electrostático la diferencia de potencial constante entre las placas, los resultados son totalmente diferentes (ver problemas).

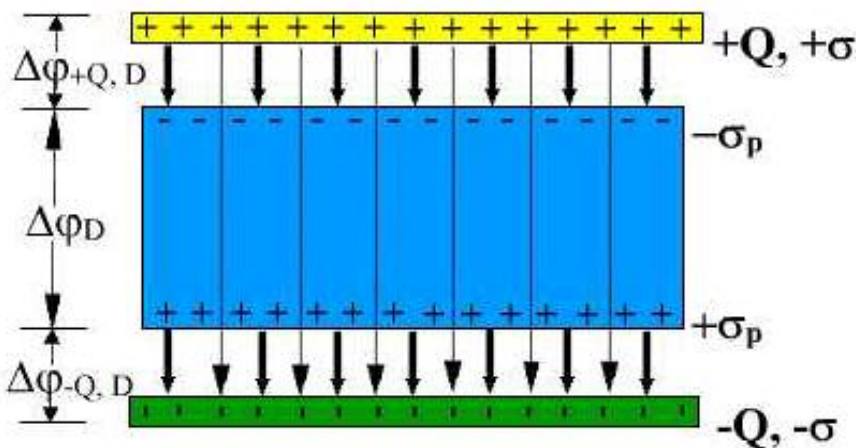


Fig. II.3-19. a) Potenciales y b) Campo y desplazamiento eléctrico en el capacitor de placas paralelas.

El primer capacitor de placas paralelas construido con el fin de almacenar carga fue inventado por Leyden en 1746, casi 100 años antes de conocerse la teoría de la capacitancia y el efecto de los dieléctricos. Este capacitor se conoce hoy día como “Jarra de Leyden”. Por razones pedagógicas se muestra en la figura II.3-20 una representación esquemática de este capacitor, el cual consiste de una botella de vidrio que sirve como dieléctrico, con sus paredes externa e interna recubierta de una delgada lámina de estaño las cuales funcionan como las placas metálicas. La lámina externa se conecta a tierra en tanto que la interna se conecta a una perilla de bronce externa la cual sirve para cargar el capacitor.

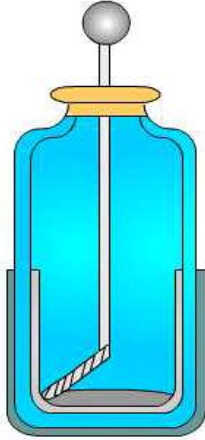


Fig. II.3-20 Jarra de Leyden.

II.3.4 Energía eléctrica

Los seres vivientes con cierto grado de organización han sentido la necesidad de almacenar alimentos para su posterior aprovechamiento en tiempos de escasez. El ser humano como ser inteligente ha transferido esta actitud en su necesidad de disponer de energía para tiempos de crisis. De forma similar como los humanos desde tiempos inmemoriales almacenan leña durante el verano para su uso en el invierno, los científicos han intuido la posibilidad de almacenar energía. Los primeros investigadores de la electricidad se impresionaban en el laboratorio cuando chispas saltaban entre los terminales de los generadores electrostáticos, pero aún más admiración y asombro les producía la enorme cantidad de energía desarrollada en los rayos y relámpagos. De aquí nació una inquietud y ambición por la posibilidad de almacenar carga y domesticar la energía eléctrica para su posterior uso a medida que se necesitara. Esta desenfrenada ambición trajo consigo un desarrollo tecnológico en la búsqueda de dispositivos que pudieran fungir como almacenadores de electricidad, de manera que aún cuando para 1746 ya se había presentado uno de estos dispositivos, la jarra de Leyden, no fue sino más de 100 años después que se tenían claro los principios o teorías que regían la capacidad de un cuerpo o sistema en almacenar y condensar la carga. Este es uno de los casos más patéticos en los cuales la tecnología antecede la teoría.

II.3.4.a Energía almacenada en un capacitor

La energía almacenada en un capacitor puede ser evaluada de la misma forma cómo se procedió en la sección II.2.9. Para ello evaluaremos el trabajo necesario en ensamblar la carga en el capacitor de forma que en un instante dado la carga que poseen las placas es q . Se quiere ahora aumentar la carga en las placas llevando una diferencial de carga positiva dq desde la placa positiva a la negativa en contra del campo eléctrico como se indica en la figura II.3-21. En este proceso se debe hacer un elemento de trabajo dW para vencer al campo eléctrico el cual de acuerdo con la definición de diferencia de potencial y por la ec. II.3-3 es:

$$dW = \Delta \phi d q = \Delta \phi d(\Delta \phi) = \frac{q}{C} d q \quad (\text{II.3-80})$$

Se quiere cargar el capacitor desde su estado totalmente descargado hasta su estado de carga total Q correspondiente a una diferencia de potencial máxima $\Delta \phi$. Así que por el principio de conservación de la energía el trabajo total es equivalente a la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor es igual a:

$$W_T = U_E = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{q}{C} d q = \frac{Q^2}{2 C} = \frac{C(\Delta \phi)^2}{2} \quad (\text{II.3-81})$$

Mediante las ecs. II.3-74-77 se puede expresar la energía en el capacitor en términos del campo y la constante dieléctrica de la forma:

$$U_E = \frac{\epsilon_r}{2} \left(\frac{A}{4 \pi K_0} \right) (E d)^2 = \frac{\epsilon_r}{8 \pi K_0} (\tau E^2) \quad (\text{II.3-82})$$

De donde se puede también obtener la densidad de energía o energía por unidad de volumen:

$$u_E = \frac{\epsilon_r}{8 \pi K_0} E^2 \quad (\text{II.3-83})$$

Obsérvese que la energía potencial eléctrica es directamente proporcional al cuadrado del campo eléctrico, por ello se dice que la energía almacenada en el capacitor reside en el campo eléctrico dentro del dieléctrico, El efecto primordial de la constante dieléctrica es aumentar la energía por un factor equivalente a la constante dieléctrica. Todo esto es una característica general de los medios dieléctricos y no del arreglo geométrico como veremos a continuación.

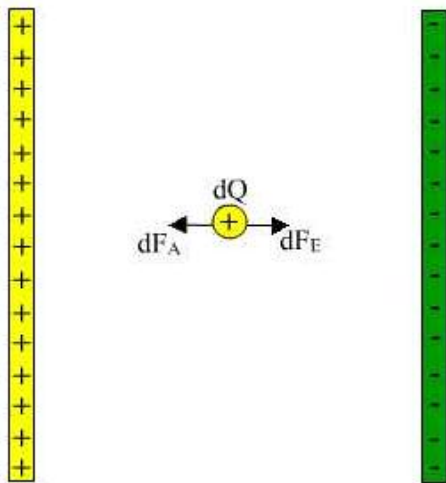


Fig. II.3-21. Ensambladura de la carga de un capacitor.

II.3.4.b Energía almacenada en el campo eléctrico

En la sección II.2.7 se determinó la energía potencial de una distribución de carga. Ahora consideremos distribuciones de carga volumétrica en aislantes y superficial en conductores y evaluaremos la energía potencial eléctrica, para encontrar de una forma general, pero similar a como se procedió en la sección anterior, qué relación existe entre ésta y la energía del campo electrostático. Cuando se tienen distribuciones volumétricas tanto como superficiales la energía potencial eléctrica se puede a partir de la ec. II.2-91 expresar como:

$$U_E = \int \frac{\rho(r) \varphi d\tau}{2} + \int \frac{\sigma(r) \varphi dA}{2} \quad (\text{II.3-84})$$

Mediante la ec. II.2-84 y la propiedad A.xx de la divergencia (apéndice A) el primer término de la ec. II.3-84 se puede escribir como:

$$\int \frac{\rho(r) \varphi d\tau}{2} = \int \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \varphi d\tau}{8\pi K_0} = \int \frac{\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) d\tau}{8\pi K_0} - \int \frac{\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \varphi d\tau}{8\pi K_0} \quad (\text{II.3-85})$$

Empleando el teorema de la divergencia ec. II.2-63 en el primer término y la ec. II.2-83 en el segundo, la ec. II.3-85 queda en la forma:

$$\int \frac{\rho(r) \varphi d\tau}{2} = \int \frac{(\varphi \vec{E}) \cdot d\vec{S}}{8\pi K_0} + \int \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} d\tau}{8\pi K_0} \quad (\text{II.3-86})$$

Si ahora se toma en cuenta que φ es un escalar y que el producto escalar del campo con los elementos de superficie sólo es diferente de cero en las superficies de los conductores, entonces, ya que el campo es opuesto al elemento de superficie este producto, el cual representa un flujo negativo, proporciona la componente normal del campo, es decir;

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_n dS \quad (\text{II.3-87})$$

Se puede ahora emplear la ec. II.2-112 para escribir la ec. II.3-86 de la forma:

$$\int \frac{\rho(r) \varphi d\tau}{2} = - \int \frac{\varphi E_n dS}{8\pi K_0} + \int \frac{E^2 d\tau}{8\pi K_0} = - \int \frac{\varphi \sigma dS}{2} + \int \frac{E^2 d\tau}{8\pi K_0} \quad (\text{II.3-88})$$

Remplazando en II.2-84 el término superficial se cancela quedando que:

$$U_E = \int \frac{E^2 d\tau}{8\pi K_0} \quad (\text{II.3-89})$$

Este resultado indica que la energía potencial eléctrica de una distribución de cargas está totalmente comprendida en el campo eléctricos siendo proporcional al cuadrado del mismo con una densidad de energía por unidad de volumen $E^2/8\pi K_0$. La evaluación de la integral se ejecuta en todo el espacio recordando que en aquél ocupado por los conductores el campo es nulo.

La presencia de un medio dieléctrico no impone ninguna restricción en la determinación de la energía potencial eléctrica mediante la ec. II.3-84, siempre y cuando el medio sea isotrópico e ideal. En estas condiciones el campo determinante es el desplazamiento eléctrico. Así que procediendo de forma similar al caso anterior, el primer término de la ec. II.3-84 se convierte mediante la ayuda de las ecs. II.3-45 y el teorema de la divergencia, ec. II.2-63, en;

$$\int \frac{\rho(r) \varphi d\tau}{2} = \int \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \varphi d\tau}{2 [4\pi]} = \int \frac{\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{D}) d\tau}{2 [4\pi]} - \int \frac{\vec{D} \cdot \vec{\nabla} \varphi d\tau}{2 [4\pi]} = \int \frac{\varphi \vec{D} \cdot d\vec{S}}{2 [4\pi]} - \int \frac{\vec{D} \cdot \nabla \varphi d\tau}{2 [4\pi]} \quad (\text{II.3-90})$$

En estas ecuaciones y las siguientes para simplificar las ecuaciones en los dos sistemas se empleará como nomenclatura el símbolo [], el cual significa que el factor dentro de corchete se emplea para el sistema ues-CGS y no se emplea para el MKS.

De nuevo se puede considerar que como φ es un escalar el producto escalar del campo con los elementos de superficie se realiza en las superficies de los conductores pero en este caso proporciona el opuesto de la componente normal del desplazamiento eléctrico, es decir;

$$\vec{D} \cdot d\vec{S} = - D_n dS \quad (\text{II.3-91})$$

La componente normal del desplazamiento eléctrico viene dada por la ec. II.3-63 mediante ésta ecuación y la II.3-91 se puede escribir la ec. II.3-90 de la forma:

$$\int \frac{\rho(r) \varphi d\tau}{2} = - \int \frac{\varphi \sigma dS}{2} - \int \frac{\vec{D} \cdot \nabla \varphi d\tau}{2 [4\pi]} \quad (\text{II.3-92})$$

Remplazando ésta expresión en II.2-84 el término superficial de nuevo se cancela quedando que:

$$U_E = - \int \frac{\vec{D} \cdot \nabla \varphi d\tau}{2 [4\pi]} \quad (\text{II.3-93})$$

Mediante las ecs. II.2-83, II.3-47,52 esta expresión se puede colocar en tres formas diferentes pero equivalentes en términos de los vectores de campo y desplazamiento eléctrico como:

$$U_E = \int \frac{\vec{D} \cdot \vec{E} d\tau}{2 [4\pi]} = \varepsilon_{[r]} \int \frac{E^2 d\tau}{2 [4\pi]} = \int \frac{D^2 d\tau}{2 [4\pi] \varepsilon_{[r]}} \quad (\text{II.3-94})$$

Así que la densidad de energía se puede escribir como:

$$u_E = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2 [4\pi]} = \varepsilon_{[r]} \frac{E^2}{2 [4\pi]} = \frac{D^2}{2 [4\pi] \varepsilon_{[r]}} \quad (\text{II.3-95})$$

Se concluye una vez más que la energía reside en todo el espacio en donde se encuentran los campos eléctrico y de desplazamiento.

PREGUNTAS - CAPITULO II.3

- 1) Explique y justifique porqué un capacitor de dos conductores es más eficiente para almacenar carga que uno de un solo conductor.
- 2) Proporcione varios argumentos por los cuales no es apropiado utilizar sólo aislantes para almacenar carga.
- 3) Explique en detalle porqué en el experimento E.II.3-1 el aumento de las áreas de las placas conduce a una disminución de la diferencia de potencial entre ellas.
- 4) ¿En cuanto varía la energía eléctrica de un capacitor de placas paralelas si la distancia entre las placas se disminuye a la mitad ?, en las condiciones de:
 - a. Carga constante
 - b. Diferencia de potencial constante¿Qué sucede con la variación de la energía?
- 5) Explique porqué una molécula lineal simétrica como la de CO_2 no posee momento dipolar eléctrico permanente.
- 6) En el problema # 24 se determinó el trabajo necesario para separar las placas de un condensador con carga y diferencia de potencial constante. ¿Cómo explica usted la diferencia en el trabajo bajo estas condiciones?.
- 7) ¿Por qué es necesario que el medio sea isotrópico e ideal para la determinación de la energía del campo electrostático mediante la ec. II.3-84?.
- 8) Explique cómo y por qué un capacitor construido de n placas en paralelo es de alta capacidad y ocupa un espacio mínimo en comparación con n capacitores en paralelo (ver problema # 30).

PROBLEMAS - CAPITULO II.3

- 1) En la figura se muestra un capacitor consistente de tres esferas conductoras concéntricas de radios $R_1 < R_2 < R_3$, con las esferas interna y externa conectadas a tierra. Determine la capacitancia de esta configuración geométrica.
- 2) Determine la capacitancia por unidad de longitud de dos cilindros de radio R y longitud L tal que $L \gg R$, con sus centros separados una distancia D , cuando a) $D \gg R$, b) $D \gtrsim R$. Demuestre que una expresión se reduce a la otra dentro de los límites de aplicabilidad.
- 3) Deduzca una expresión para la capacitancia de dos esferas metálicas de radios a y b con cargas $+q$ y $-q$ respectivamente, separadas a una gran distancia d entre sus centros tal que aun cuando el potencial de una afecta el de la otra éstas no se afectan la distribución de la carga. Demuestre que el resultado en primer orden se reduce a:

$$C = \left[K_0 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right) \right]^{-1}$$

Repita el problema si $d \gg a, b$ tal que el potencial de una esfera no afecta el de la otra.

Ayuda: Vea problema II.2-19.

- 4) Entre las placas del capacitor de la figura II.3-3 se coloca un dieléctrico de la misma área y de espesor t y constante dieléctrica relativa ϵ_r . Demuestre que la capacitancia con respecto a la brecha en el vacío aumenta por un factor:

$$\left[1 - \frac{t}{d} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \right]^{-1}$$

- 5) En el problema anterior si en vez de un dieléctrico se introduce una placa de metal de la misma área y de espesor t , demuestre que la capacitancia con respecto al capacitor de brecha en el vacío es:

$$C = C_0 \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{t}{d} - 1 \right)} \right]$$

- 6) Determine las variaciones de la carga, el campo eléctrico y la capacitancia de un capacitor de placas paralelas sometido a una diferencia de potencial constante cuando se introduce un dieléctrico.
- 7) Capacitor esférico con dieléctrico. A un capacitor esférico como el de la figura II.3-4 de radios R_1 y R_4 se le coloca una concha esférica de constante dieléctrica ϵ_r concéntrica de radios R_2 y R_3 tal que $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$. Deduzca una expresión para la diferencia de potencial como función del radio entre los dos conductores. Demuestre que la capacitancia viene dada por:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

- 8) Capacitor esférico con dos dieléctricos. El espacio entre las esferas del capacitor esférico se llena con dos dieléctricos, el primero de constante dieléctrica relativa ϵ_{r1} ocupa el volumen entre R_1 y una esfera de radio $R_0 > R_1$, el segundo de constante dieléctrica relativa ϵ_{r2} ocupa un volumen entre R_0 y $R_2 > R_0$. Determine la capacitancia de la configuración.
- 9) Una esfera conductora de radio 5 cms se encuentra inmersa en aire, agua o aceite de transformador. Para cada medio determine con 5 cifras significativas (incluyendo la constante de unidades): a) la capacitancia, b) la carga máxima, la densidad de carga máxima y la energía máxima que puede retener la esfera. Examine las diferencias producidas por cada material dieléctrico.
Resp.: 5.5665 pF, =0.833996 μC , 26.5469 $\mu\text{C}/\text{m}^2$, 6.2476×10^{-2} J en el aire.
- 10) Demuestre que la condición de continuidad en la componente tangencial del campo eléctrico (ec. II.3-57) es equivalente a una continuidad en el potencial eléctrico.
- 11) Demuestre que la condición de continuidad o discontinuidad en el vector desplazamiento eléctrico (ec. II.3-59) es equivalente a una condición de continuidad o discontinuidad de la derivada del potencial eléctrico modificado por la constante dieléctrica del medio.
- 12) Se tiene una interfase entre dos medios de permitividad 2 y 10. Determine en que dirección con respecto a la vertical a la interfase se tuercen las líneas del campo y el desplazamiento eléctrico
- 13) A partir de las condiciones de frontera deduzca una relación entre los vectores campo y desplazamiento eléctrico y la densidad de carga libre en la interfase entre un conductor y un medio dieléctrico de constante dieléctrica relativa ϵ_r .
- 14) Si el campo necesario para el rompimiento eléctrico del aislamiento de un dieléctrico es de magnitud E_0 , determine una expresión para la diferencia de potencial entre las esferas del capacitor esférico si éste posee una constante dieléctrica uniforme ϵ .
- 15) ☼ Si suponemos que un dipolo molecular produce un campo $E_p = -\nabla\phi$ siendo el potencial dado por la ec. II.3-26, demuestre que las contribuciones a la polarización debido al material dieléctrico dentro de una cavidad esférica es igual pero opuesta a la contribución del material fuera de la esfera.
- 16) ☼ Demuestre que el campo dentro de una cavidad esférica viene dado por la ecuación II.3-67.
- 17) La tira dieléctrica del problema # 4 se jala hacia un costado de forma que sólo una parte x de la tira queda ente las placas. La placa es cuadrada de lado L y se desprecia efectos de borde. Deduzca una expresión para la capacitancia y la energía en función de x y C_0 la capacitancia sin dieléctrico. Si suponemos al capacitor aislado con una carga Q , encuentre la fuerza sobre el dieléctrico y determine si la tira es atraída o repelida por las placas.
- 18) ☼ Demuestre el teorema de Thomson:
“Un aumento en la constante dieléctrica sin alteración de las cargas disminuye la energía almacenada en el campo eléctrico.”

- 19) En un capacitor de placas paralelas de área A y separación d se coloca una carga Q , luego se coloca entre las placas un dieléctrico de constante dieléctrica ϵ que sólo cubre un área A_0 como se muestra en la figura. Determine a) las densidades de carga en los sectores sin y con dieléctrico, b) la fuerza sobre las placas, c) la capacitancia
- 20) Varios conductores reciben una cierta cantidad fija de carga. Demuestre que la carga se redistribuirá en las superficies de los conductores de forma tal que la energía del sistema es mínima.
- 21) Una configuración geométrica consiste de tres esferas concéntricas de radios $R_1 < R_2 < R_3$. La esfera más interna es conectada mediante un hilo conductor muy fino a la esfera externa a través de un hueco en la esfera intermedia, en tanto que ésta última es conectada a tierra. Determine la capacitancia de ésta configuración.
- 22) Un capacitor formado por dos esferas de radios a y b se divide en dos hemisferios (la esfera es cortada en dos mitades por un plano diametral). Demuestre que la fuerza requerida para mantener las dos mitades juntas es:

$$F = \frac{1}{8} Q^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

- 23) Demuestre que las placas paralelas de un capacitor de área A y densidad de carga superficial σ se atraen con una fuerza :

$$F = 2 \pi K_0 \sigma^2 A$$

Demuestre que la presión entre las placas es equivalente a la densidad de energía del capacitor. Demuestre que si se agrega un dieléctrico de constante relativa ϵ_r . La fuerza se reduce por un factor $1/\epsilon_r$.

- 24) En la base del resultado del problema anterior, calcule el trabajo necesario en separar las placas de un condensador de placas paralelas de 100 cm^2 desde una separación de 5 mm hasta una separación final de 1 cm , cuando:
- a) Las placas se mantienen con una carga constante de 1 nC .
- b) Las placas se mantienen con una diferencia de potencial constante de 100 V .
¿En qué se invierte el trabajo?, ¿cómo varía la energía del capacitor?
Suponga campo eléctrico uniforme y desprecie efectos de borde.
Resp.: a) 2.83 mDinas , b) 4.43 mDinas .

- 25) Demuestre que el mismo resultado del problema anterior es posible no en términos de la fuerza sino en términos de la variación en energía eléctrica debido a la variación en capacitancia.
- 26) Dos capacitores de capacitancias C_1 y C_2 y cargas iniciales Q_1 y Q_2 son conectados en paralelo. Determine la energía del sistema en paralelo y la variación de energía con respecto a los capacitores separados. Es la variación positiva o negativa, es decir hay pérdida o ganancia de energía?, ¿hacia donde va la pérdida ó de donde proviene la ganancia?.
- 27) Demuestre cualitativamente o justifique el siguiente teorema:
“ *Cualquier pedazo de material dieléctrico sometido a un campo eléctrico es sujeto a fuerzas que lo arrastran desde la región de campo (potencial) bajo hacia la región de campo (potencial) alto*”.

- 28) El capacitor de una esfera presentado en la sección II.3.1 se pinta con una laca de constante dieléctrica relativa de 10 . Si la capa de laca tiene un espesor de 2 mm y la

- esfera un radio de 9 mm, calcule la capacitancia del capacitor y el factor multiplicativo por el cual aumenta la capacitancia de la esfera sin laca. Resp.: 1.2 pF, 110/92.
- 29) Obtenga el resultado de la ec. II.3-75 mediante la aplicación de las condiciones de frontera en la interfase conductor-dieléctrico.
- 30) Capacitores comerciales son construidos de n placas de área A en paralelo a una separación constante d. Deduzca una expresión para la capacitancia de este sistema.
- 31) Demuestre que la capacitancia equivalente de una configuración en serie es siempre menor que cualquiera de las capacitancias individuales.
- 32) Deduzca una expresión para los vectores campo, desplazamiento y polarización eléctrica para una carga puntual q en un medio dieléctrico de constante dieléctrica relativa ϵ_r . Muestre que no hay densidad de carga volumétrica y que la carga total en el medio es q/ϵ_r .
- 33) ☼ Suponga que tal como se muestra en la figura II.3-13 la nube electrónica se desplaza de forma rígida una distancia δl con respecto al núcleo de carga Ze. Suponga también que el átomo se puede considerar como una esfera de carga positiva de radio r_0 (el radio del átomo) y la nube electrónica desplazada como una esfera de carga negativa de radio δl , Empleando la ec. II.3-65 demuestre que la polarizabilidad del átomo es:

$$\alpha = \frac{r_0^2}{K_0}$$

Utilice el radio atómico del átomo de Oxígeno y Nitrógeno y evalúe la polarizabilidad de estos átomos. Compare con los valores obtenidos de la ecuación de Clausius-Mosotti y explique las diferencias encontradas.

- 34) En las figuras a y b se presentan dos sistemas de capacitores. Encuentre la capacitancia equivalente de cada sistema, la carga y energía acumulada en cada capacitor y la carga y energía total en el sistema.