

CONTENIDO

Capítulo II.2 Campo y Potencial Eléctrico	2
II.2.1 Definición de campo eléctrico.....	2
II.2.2 Campo producido por varias cargas discretas.....	4
II.2.3 Campo eléctrico producido por una distribución de carga continua.....	4
II.2.3.a Campo producido por una distribución de carga lineal.....	6
II.2.3.b Campo producido por una distribución de carga superficial.....	8
II.2.3.c Campo producido por una distribución de carga volumétrica.....	11
II.2.4 Líneas y flujo del campo eléctrico- Ley de Gauss.....	12
II.2.5 Aplicaciones de la ley de Gauss.....	19
II.2.6 Ley de Gauss en forma diferencial.....	26
II.2.7 Concepto de potencial eléctrico y energía potencial eléctrica.....	26
II.2.7.a Concepto Físico de potencial.....	27
II.2.7.b Concepto matemático de potencial: Cálculo u obtención del campo a partir del potencial eléctrico y viceversa.....	32
II.2.8 Potencial producido por una configuración de cargas discretas y puntuales..	34
II.2.9 Determinación de la energía potencial y el potencial eléctrico en una distribución continua de carga.....	34
II.2.9.a Potencial producido por una distribución de carga lineal.....	36
II.2.9.b Potencial producido por una distribución de carga superficial.....	38
II.2.9.c Potencial producido por una distribución de carga volumétrica.....	40
II.2.10 Superficies y volúmenes equipotenciales: Propiedades y usos.....	41
II.2.11 El dipolo eléctrico.....	43
II.2.12 Campo eléctrico, potencial y distribución de la carga en conductores.....	43
II.2.12.a Densidad de carga en conductores puntiagudos o protuberancias.....	49
II.2.12.b Conductores con cargas y cavidades. Apantallamiento electrostático...	54
PREGUNTAS CAPITULO II.2.....	57
PROBLEMAS CAPITULO II.2.....	59

Capítulo II.2 Campo y Potencial Eléctrico

En la interacción eléctrica entre cargas en reposo regida por la ley de Coulomb la cual se presentó en el capítulo precedente, vista como una acción a distancia se distingue de las interacciones mecánicas en que actúa sin mediar contacto entre las cargas. La ley de Coulomb aún cuando establece la relación que permite determinar la magnitud de la interacción eléctrica a través de la fuerza entre cargas, no rige o explica cómo ésta fuerza llega o se transmite de un cuerpo al otro. Para mediados de 1800 hasta finales del siglo XIX se postularon diversas teorías para explicar cómo se transmite o propaga la interacción eléctrica así como la gravitación universal, entre ellas es meritorio mencionar la teoría del éter. Varios investigadores propusieron que las interacciones gravitacional y eléctrica se transmitían o llegaban de un cuerpo a otro mediante una acción a distancia o *campo*. El concepto primitivo de campo se entendió como la interacción entre cuerpos vía un medio transmisor como si los cuerpos actuaran sobre el medio y éste sobre el segundo cuerpo inter-actuante. Hoy día se tiene plenamente establecido que la interacción a distancia se realiza mediante el concepto de campo sin mediar para ello ningún medio transmisor. Los campos pueden ser gravitacional, eléctrico, nuclear, etc. El campo que transmite la interacción eléctrica se denomina *campo eléctrico*. La teoría matemática de campos que rige la interacción entre cuerpos cargados fue desarrollada por J. C. Maxwell. En la búsqueda interminable por dar una explicación satisfactoria a los fenómenos eléctricos los Físicos se han visto en la necesidad de introducir o definir conceptos matemáticos que permitan una metodología más sencilla para entender el campo, uno de estos conceptos es el de potencial eléctrico. Se podría argumentar que el campo eléctrico es la representación vectorial y el potencial eléctrico la representación escalar de la transmisión a distancia de la interacción eléctrica.

II.2.1 Definición de campo eléctrico

Mediante el concepto de campo se puede establecer el siguiente teorema:

Toda carga eléctrica establece o genera un campo eléctrico en todo el espacio que la rodea y mediante el cual la carga transmite la interacción eléctrica a otras cargas en su vecindad.

En consecuencia el campo eléctrico sólo actúa sobre cualquier pedazo de materia en donde haya cargas individuales o por pares de ellas para separarlas. Este teorema también conduce a una metodología para conocer o detectar la presencia de un campo eléctrico, esto es, mediante una carga colocada en el espacio en sondeo de forma tal que si hay un campo eléctrico en un punto del espacio entonces habrá una fuerza eléctrica sobre la carga y obviamente si no hay un campo no habrá fuerza. Sin embargo, la carga empleada para detectar el campo también produce su propio campo y puede distorsionar el campo que se quiere detectar. Por lo tanto es necesario que la *carga de sondeo* o también conocida como *carga de prueba* debe producir la mínima o casi nula distorsión. Para este objetivo se requiere que la carga sea lo más pequeña posible tal que su propio campo sea despreciable comparado con el campo que se quiere determinar, de forma que ésta no afecta la distribución de carga con la cual interactúa ni tampoco al medio que la rodea. En

consecuencia el campo eléctrico será independiente de la carga de prueba. Por convención la carga de prueba se considera positiva tal que su carga $q_p \rightarrow 0$, entonces por consideraciones de distribución de carga podemos inferir que una carga de prueba equivale a una carga puntual.

Siendo la fuerza eléctrica determinada por una ley proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, la interacción y por lo tanto el campo aún cuando disminuyen con la distancia no se anulan por completo, esto implica que el campo se puede extender hasta el infinito. No obstante, en la práctica la presencia de un campo se determina siempre y cuando exista una fuerza perceptible y medible sobre la carga de prueba. Si la carga que produce el campo se mueve el campo la acompaña y también se mueve. El estudio de la interacción eléctrica y del campo producido por cargas en movimiento no será objeto de estudio en esta obra, este tópico es materia de la Electrodinámica Clásica.

El concepto de campo eléctrico divide la interacción eléctrica entre cuerpos en dos partes, la primera consiste en conocer o determinar las fuentes del campo eléctrico y la segunda, en determinar el efecto del campo sobre la carga de prueba o carga en estudio. Esto parecería complicar las cosas pero como veremos a continuación por el contrario simplifica el proceso de cálculo de la determinación de la fuerza eléctrica sobre una carga, esto hace el modelo de campo una de las herramientas más poderosas para el estudio de la interacción eléctrica.

Supongamos que queremos establecer el origen de la interacción eléctrica sobre una carga de prueba, dado que la carga de prueba es puntual podemos postular que el vector campo eléctrico en el sitio en donde se encuentra la carga de prueba se puede definir a partir del vector fuerza eléctrica como:

$$\vec{E} = \lim_{q_p \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_p} \quad (\text{II.2-1})$$

Como derivación de esta definición el vector campo eléctrico tendrá la dirección y el sentido del vector fuerza eléctrica. Así que si se coloca una carga de cualquier magnitud en la presencia de un campo eléctrico, la carga se desplazará en la dirección del campo si ésta es positiva y en la dirección contraria si es negativa. Las unidades del campo eléctrico serán entonces Fuerza/carga= $ML^2/t^2 \cdot q$ =Newton/Coul o Dinas/esu. Las unidades del campo eléctrico en el sistema ues-CGS son ues/cm².

Consideremos ahora que la fuente de campo eléctrico consiste en una carga puntual q_i colocada a una distancia r de otra carga puntual de prueba q_j . Es evidente de la ec. II.1-5 que el campo eléctrico producido por la carga q_i en el sitio de la carga puntual q_j viene dado por:

$$\vec{E}_i = K_0 \frac{q_i}{|r_{ij}|^2} \hat{r}_i \quad (\text{II.2-2})$$

En donde el radio vector unitario es a lo largo de la línea que une los cuerpos y expresado por la ec. II.1-6. Es notable apreciar que de la ec. II.2-2 el campo de cargas puntuales sigue la misma ley del inverso del cuadrado de la distancia expresado por la ley de Coulomb.

II.2.2 Campo producido por varias cargas discretas

Supongamos ahora como extensión natural de la sección II.1-1 que se tienen n cargas discretas o puntuales y se quiere determinar el campo eléctrico que éstas pueden ejercer en un punto P como se muestra en la figura II.2-1. Cada i -ava carga establecerá un campo dado por la ec. II.2-2. De la definición de campo eléctrico es claro que el vector campo eléctrico obedecerá también el principio de superposición, el cual para campos eléctricos¹ se puede enunciar como:

Cada carga produce un campo eléctrico como si actuara individualmente sin que la presencia de las demás modifique o altere cada campo

Así que, el campo eléctrico resultante en un punto del espacio es la suma vectorial de todos los campos;

$$\vec{E}_R = \sum_i^n = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n = \sum_i^n K_0 \frac{q_i}{|r_{ij}|^2} \hat{r}_i \quad (\text{II.2-3})$$

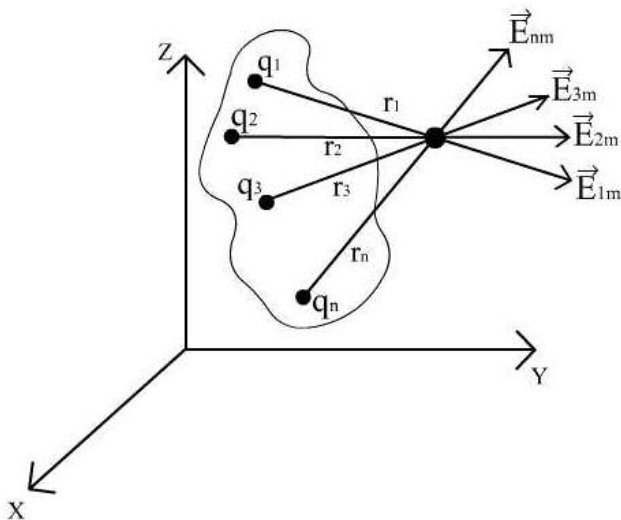


Fig. II.2-1. Campo eléctrico producido por varias cargas discretas

II.2.3 Campo eléctrico producido por una distribución de carga continua

La determinación del campo eléctrico producido por configuraciones de cargas como las definidas en las ecs. II.1-12 sigue un procedimiento similar y en algunos casos idéntico, al ya visto en la sección II.1.1. En el caso más general de interacción entre configuraciones de carga complejas quedará claro que es más fácil determinar primero el campo eléctrico y luego la fuerza que determinar de buenas a primeras la fuerza eléctrica. He aquí entonces una de las variables físicas más manejables mencionadas en el capítulo anterior.

Si se tiene una distribución de carga sobre un cuerpo determinado y consideramos dentro de ésta un elemento de carga dq el cual se puede considerar como una carga puntual, entonces en la base de las ecs. II.2-2 se puede decir que éste elemento de carga produce un elemento de campo dE . Si consideramos por ejemplo como se muestra en la figura II.2-2 un

¹ El principio de superposición de campos eléctricos conduce a la linealidad en las ecuaciones básicas de la teoría de campos.

punto P en el espacio y tomamos como origen el sistema XYZ en el punto O, entonces con respecto a este sistema de coordenadas la posición del elemento de carga está determinado por el radio vector r y el sitio de determinación del campo eléctrico por el radio vector R ; Entonces el elemento de carga se encuentra a una distancia $|R-r|$ y su elemento de campo vendrá dado por:

$$d\vec{E}_P = K_0 \frac{dq}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \quad (\text{II.2-4})$$

Similarmente a como se procedió en la sección II.1.7b, tomamos en la distribución de carga un elemento de volumen, área o longitud tal que el elemento de carga viene expresado por la ec. II.1-16. Según sea la dimensión del cuerpo en el espacio, se tendrán las distribuciones dadas por las ecs. II.1-12 y por lo tanto el campo en el punto P vendrá dado por las integrales:

$$\vec{E}_P = K_0 \left\{ \begin{array}{l} \iiint \frac{\rho(r) dV}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \\ \iint \frac{\sigma(r) dA}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \\ \int \frac{\lambda(x) dx}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \end{array} \right. \quad (\text{II.2-5})$$

La integración de cualquiera de éstas expresiones vectoriales puede ser tan compleja como aquellas de las ecs. II.1-17 y de hecho las integrales son idénticas por cuanto en II.1-17 se determina la fuerza sobre una carga puntual. Los requisitos para determinar las integrales II.2-5 son los mismos que aquellos para las ecs. II.1-17. Pero si se quisiese determinar la fuerza de una distribución de carga sobre otra, la ec. II.2-5 representa un paso previo más sencillo que el de calcular la fuerza en un solo proceso integrativo. De nuevo se presentan los casos de densidad de carga lineal, superficial y volumétrica determinadas por las densidades de carga dadas en las ecs. II.1-11 y las cuales analizaremos a continuación.

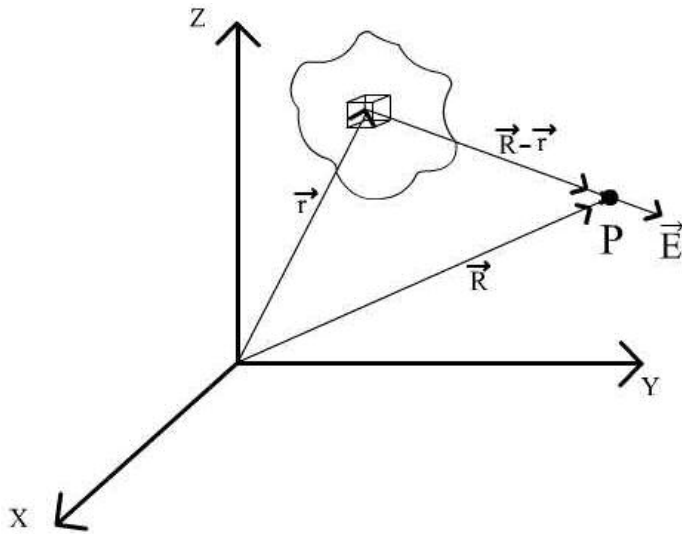


Fig. II.2-2. Campo producido por una distribución de carga.

II.2.3.a Campo producido por una distribución de carga lineal

El campo producido por una distribución de carga lineal como el hilo de la sección II.1.7c se obtiene directamente de la ec. II.1-23 y se deja al estudiante como ejercicio. En esta sección analizaremos el caso del campo que establecería una carga distribuida en un anillo muy delgado de radio a , de forma que la carga está distribuida en una geometría lineal, es decir, la carga se distribuye en una sola dimensión en un cuerpo muy delgado de longitud igual al perímetro del círculo y que posee una carga total Q . El campo se evaluará en un punto P el cual para simplificar el cálculo lo tomaremos a una distancia R desde el centro del anillo de la figura II.2-4. Ya que la carga se encuentra distribuida en el perímetro del círculo entonces en la base de la ec. II.1-12c podemos definir una densidad de carga por unidad de longitud:

$$\lambda(s) = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi a} = \frac{dq}{ds} \quad (\text{II.2-6})$$

siendo ds un elemento de arco del círculo.

Por razones de simetría es más apropiado tomar como origen de coordenadas el centro del círculo, entonces un elemento de carga $dq = \lambda \cdot ds$ situado en la periferia del círculo estaría a una distancia a del centro del círculo de acuerdo con el radio vector:

$$\vec{r} = a \hat{r}$$

En tanto que el elemento de carga vendría situado con respecto al punto P a una distancia:

$$|\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{a^2 + R^2} \quad (\text{II.2-8})$$

Por trigonometría es fácil deducir que el vector unitario que determina este vector viene dado por:

$$\hat{R} - \hat{r} = \text{Cos } \theta \hat{j} + \text{Sen } \theta \hat{r} \quad (\text{II.2-7})$$

Entonces de acuerdo con las ecs. II.2-4→6, en el punto P el elemento de carga produciría un elemento de campo:

$$d\vec{E}_P = K_0 \frac{\lambda ds}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\vec{R} - \vec{r}) = K_0 \frac{\text{Cos } \theta \lambda ds}{a^2 + R^2} \hat{j} + K_0 \frac{\text{Sen } \theta \lambda ds}{a^2 + R^2} \hat{r} \quad (\text{II.2-9})$$

Debido a que la carga se encuentra distribuida en la periferia, por geometría angular el elemento de arco se puede expresar en términos de la variable angular en el plano del anillo de la forma:

$$ds = a d\phi \quad (\text{II.2-10})$$

El campo total vendrá determinado por la integral sobre los límites $\phi: 0 \rightarrow 2\pi$ como;

$$\vec{E}_P = K_0 \int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos } \theta \lambda a d\phi}{a^2 + R^2} \hat{j} + K_0 \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sen } \theta \lambda a d\phi}{a^2 + R^2} \hat{r} \quad (\text{II.2-11})$$

Es obvio de la figura II.2-3 que el ángulo y la distancia elemento de carga-punto son los mismos para todos los elementos de carga y por lo tanto pueden ser sacados de la integral para obtener:

$$\vec{E}_P = K_0 \frac{a \text{Cos } \theta \lambda}{a^2 + R^2} \int_0^{2\pi} d\phi \hat{j} + K_0 \frac{a \text{Sen } \theta \lambda}{a^2 + R^2} \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} \quad (\text{II.2-12})$$

La integral en el primer término es fácil de evaluar ya que el radio vector unitario tiene la misma dirección y sentido para todos los elementos de carga, pero, en el segundo término comprende el radio vector unitario que varía de dirección y sentido a medida que se barre la variable angular alrededor de la periferia. Si se transforma este radio vector unitario en términos de las coordenadas angulares y se integra se encontraría que este término es nulo. Sin embargo, este resultado se puede obtener físicamente de la relación vectorial de los elementos de campo producidos por elementos de carga simétricos. Esto es, por simetría de la figura II.2-3 se puede ver que las componentes de campo para dos elementos de carga simétricos se anulan en el plano XZ, en tanto que en el eje Y la resultante es el doble de la mitad de los límites. Así que la integral II.2-12 se reduce a:

$$\vec{E}_P = K_0 \frac{2\pi a \text{Cos } \theta \lambda}{a^2 + R^2} \hat{j} \quad (\text{II.2-13})$$

Aplicando trigonometría el ángulo que el campo resultante hace con el eje Y es:

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \quad (\text{II.2-14})$$

Quedando el campo eléctrico en términos de la densidad de carga o de la carga total de la forma:

$$\vec{E}_P = \frac{2\pi K_0 a R \lambda}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j} = \frac{K_0 Q R}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j} \quad (\text{II.2-15})$$

Límites del campo de un anillo

Ahora analizaremos cómo varía el campo de un anillo cuando se extienden los límites de algunas de sus variables dimensionales. Primero veamos que sucede si R es muy grande tal que $R \gg a$, la ec. II.2-15 se reduce a:

$$\vec{E}_P = \frac{K_0 Q R}{R^3 \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}} \hat{j} \cong \frac{K_0 Q}{R^2} \hat{j} \quad (\text{II.2-16})$$

Si tomamos en cuenta que a distancia muy grandes del anillo el eje Y vendría a representar un radio desde la carga Q, entonces la ec. II.2-16 equivale al campo producido por una carga puntual. Este resultado era de esperarse ya que en el infinito un anillo aparecería como un punto. El mismo resultado se obtendría si se toma el límite $a \rightarrow 0$. Se deja como ejercicio al lector demostrar que si el radio es muy grande tal que $a \rightarrow \infty$ se obtendría el mismo resultado del campo en el centro del anillo.

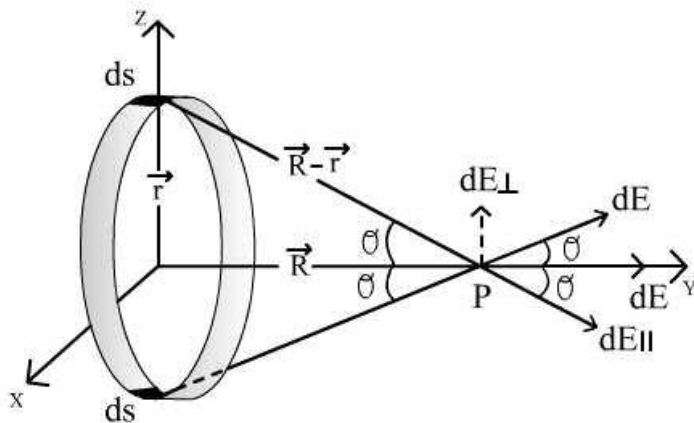


Fig. II.2-3. Campo producido por un anillo con una densidad de carga lineal.

II.2.3.b Campo producido por una distribución de carga superficial

Como ejemplo de la determinación del campo eléctrico producido por una carga distribuida en dos dimensiones, es decir, una carga distribuida en una configuración superficial, consideraremos un disco de radio a y espesor despreciable, el cual posee una carga total Q distribuida con una densidad de carga por unidad de área σ determinada por:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{dq}{dA} \quad (\text{II.2-17})$$

Para simplificar el cálculo del campo éste se estimará en un punto situado a una distancia R desde el centro del disco alineado con el plano XY como se indica en la figura II.2-4.

Este problema se resolverá empleando el resultado de la sección anterior. Así que similarmente al caso del anillo, por razones de simetría es más conveniente tomar el origen de coordenadas en el centro del cuerpo de forma tal que podemos considerar al disco como conformado por elementos diferenciales de anillos. Bajo este contexto podemos entonces considerar un elemento de anillo de radio r , espesor dr y carga $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$ situado a una distancia $|\vec{R}-\vec{r}| = (r^2 + R^2)^{1/2}$. Obsérvese que de nuevo podemos hacer $\lambda = \sigma$, de forma que este elemento de carga produciría un elemento de campo sólo en la dirección del eje Z y dado por una expresión similar a de la ec. II.2-13 de la forma:

$$d\vec{E}_p = K_0 \frac{\sigma 2\pi dr}{|\vec{R}-\vec{r}|^2} (\vec{R}-\vec{r}) = K_0 \frac{\cos\theta 2\pi\sigma dr}{r^2 + R^2} \hat{k} \quad (\text{II.2-18})$$

Luego se suman la contribución de todos los anillos hasta el radio a del disco, es decir se integrarán las contribuciones de todos los anillos diferenciales en el disco desde 0 hasta a para obtener:

$$\vec{E}_p = K_0 2\pi\sigma \int_0^a \frac{\cos\theta r dr}{r^2 + R^2} \hat{k} \quad (\text{II.2-19})$$

Para evaluar esta integral es necesario un cambio de variable, dado que la evaluación en la variable r es más compleja se hará un cambio de variable mediante las siguientes relaciones trigonométricas que se derivan de la figura II.2-4:

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{r^2 + R^2}} \quad (\text{II.2-20a}) \quad \tan\theta = \frac{r}{R} \quad (\text{II.2-20b})$$

Si diferenciamos II.2-20b obtenemos una relación entre las variables similar a la ec. II.1-38:

$$dr = R \sec^2\theta d\theta \quad (\text{II.2-21})$$

Reemplazando II.2-20-21 en II.2-19 y transformando los límites de $r: 0 \rightarrow a$, a $\theta: 0 \rightarrow \theta_0$ se obtiene:

$$\vec{E}_p = K_0 2\pi \sigma \int_0^{\theta_0} \text{Sen } \theta \, d\theta \hat{k} = 2\pi \sigma K_0 (1 - \text{Cos } \theta_0) \hat{k} \quad (\text{II.2-22})$$

El nuevo límite angular por trigonometría en la figura II.2-4 viene dado por:

$$\text{Cos } \theta_0 = \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \quad (\text{II.2-23})$$

Finalmente el campo eléctrico producido en el punto P por el disco queda de la forma:

$$\vec{E}_p = 2\pi \sigma K_0 \left(1 - \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \hat{k} \quad (\text{II.2-24})$$

Si se procede a redefinir el elemento de carga tal como se hizo en la ec. II.1-30 como:

$$dq = \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right) \lambda \sigma \, dr = \left(\frac{Q_a}{\lambda} \right) \sigma \, dr \quad (\text{II.2-25})$$

En donde Q_a es la carga en el anillo. Mediante la ec. II.2-25 se puede emplear directamente la ec. II.2-15 y obtener el mismo resultado por un camino más directo.

Límites del campo del disco

Ahora analizaremos cómo varía el campo del disco cuando se extienden el límite de alguna de su variable dimensional. Primero veamos que sucede si R es muy grande tal que $R \gg a$ se puede ejecutar una expansión en serie de Taylor (ver apéndices); así, la ec. II.2-24 se reduce a:

$$\vec{E}_p = 2\pi \sigma K_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} \right) \right) \hat{k} = \frac{K_0 Q}{R^2} \hat{k} \quad (\text{II.2-26})$$

Si tomamos en cuenta que a distancias muy grandes del anillo el eje Z vendría a representar un radio desde la carga Q, entonces la ec. II.2-16 equivale al campo producido por una carga puntual. Este resultado era de esperarse ya que en el infinito un disco aparecería como un punto. El mismo resultado se obtendría si se toma el límite $a \rightarrow 0$. Se deja como ejercicio al lector demostrar que si el radio es muy grande tal que $a \rightarrow \infty$ se obtendría el campo producido por un plano infinito, el cual también se puede obtener de la ec. II.1-40a.

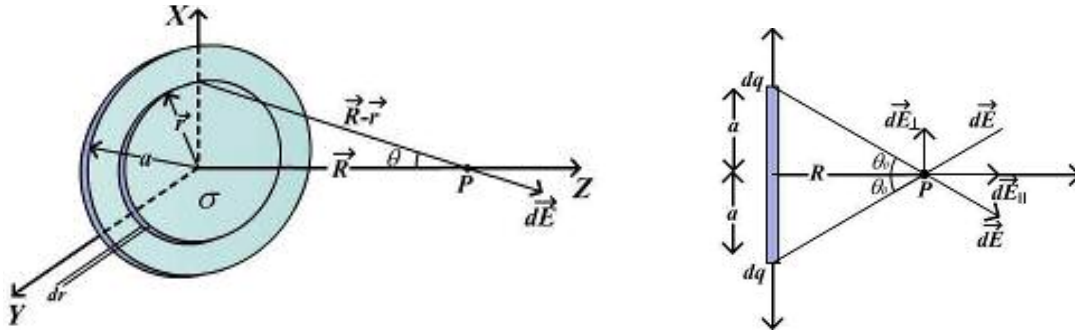


Fig. II.2-4. Campo producido por un disco con una densidad de carga superficial.

II.2.3.c Campo producido por una distribución de carga volumétrica

La determinación del campo producido por una carga distribuida en tres dimensiones en el espacio en un punto arbitrario externo a la distribución, tal como se muestra en la figura II.2-5 es un problema similar al planteado en la sección II.1.7e. El ejemplo más sencillo y manejable corresponde al de una distribución esférica, es decir una carga total Q colocada en una esfera de radio a , tal que la densidad de carga volumétrica viene dada por la ec. II.1-44). Si tomamos como origen de coordenadas el centro de la esfera y consideramos un elemento de carga dentro de un elemento de volumen en coordenadas esféricas $dV=r^2 dr \cdot d\theta \cdot d\phi$ situado a una distancia r del centro de la esfera tal como se indica en la figura II.2-5, es posible demostrar que el campo eléctrico vendría dado por (la evaluación de ésta integral se deja al lector como ejercicio, ver problemas):

$$\vec{E} = K_0 \frac{Q}{R^2} \hat{r} \quad (\text{II.2-25})$$

Es decir el campo corresponde al de una carga puntual como si toda la distribución de carga estuviese concentrada en el centro.

La evaluación del campo eléctrico producido por distribuciones no uniformes o en cuerpos de geometría complicada mediante la evaluación de integrales de volumen es un procedimiento complicado, sin embargo; veremos en la sección siguiente una metodología para determinar campos eléctricos de una forma simple.

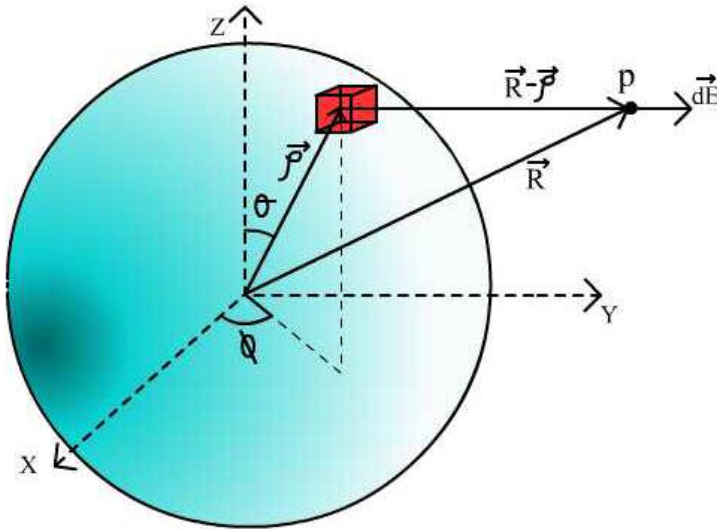


Fig. II.2-5. Campo producido por una distribución de carga esférica.

II.2.4 Líneas y flujo del campo eléctrico- Ley de Gauss

Dado que la presencia de un campo eléctrico sólo se detecta por la fuerza sobre cargas, la construcción de un mapa de las fuerzas que una carga puede ejercer sobre otras en el espacio que la rodea permite un método fácil de entender y visualizar el campo eléctrico. Este mapa de fuerzas primero propuesto y empleado por M. Faraday quien les denominó líneas de fuerza, vendrían a representar las *líneas del campo eléctrico*, como las denominaremos de ahora en adelante. Para comprender como se construye este mapa consideremos una carga puntual positiva y una negativa muy alejadas una de la otra y de cualquier otra carga de forma tal que las podemos considerar aisladas o equivalentemente podemos decir que todas las demás cargas están en el infinito. De ser esto así podemos con certeza afirmar que como se ilustra en la figura II.2-6a-b y lo confirma la ec. II.2-2, las fuerzas sobre una carga de prueba positiva serían líneas radiales que salen de la carga positiva y entran a la negativa. Entonces podemos decir que el campo eléctrico de cargas puntuales consiste de líneas radiales imaginarias. Si ahora acercamos las cargas, entonces el campo en un punto del espacio vendría dado por el principio de superposición por la suma vectorial del campo producido por ambas cargas. Repitiendo este proceso en viajar desde una carga hasta la otra, resultaría en la construcción de una curva continua imaginaria que sale de la carga positiva y termina en la negativa. La fuerza resultante y por lo tanto la línea del campo eléctrico en cada punto de ésta curva estaría representada por las flechas tangentes a la curva (línea punteada de la fig. II.2-6c). En las figuras II.2-7a-d se presenta este mapa completo para a) el dipolo, b) dos cargas positivas de igual magnitud, c) dos cargas negativas de igual magnitud.

Fig. II.2-6. Construcción de las líneas de campo eléctrico

La representación gráfica de las líneas de fuerza en todos los puntos del espacio es posible mediante la obtención de una ecuación diferencial para las líneas de fuerza. Por cuanto la dirección de la línea de fuerza es la dirección del campo y ésta es la tangente a la curva obtenida, entonces la ecuación que determina la curva para las líneas de fuerza debe

satisfacer la condición de que la pendiente sea paralela al campo eléctrico y por lo tanto deben cumplir las condiciones:

$$dx : dy : dz = E_x : E_y : E_z$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Una vez conocido el campo eléctrico con sus respectivas componentes, la solución de la ecuación diferencial II.2-30b proporciona la familia de curvas para las líneas de fuerza o del campo eléctrico.

La construcción de las líneas de campo eléctrico para mayor número de cargas discretas o para distribuciones de cargas más complejas en las cuales una distribución afectaría a la otra, sigue un procedimiento similar mas complejo y tedioso pero que arroja los mismos resultados. En la sección II.2-10 se presentarán las líneas del campo eléctrico para otras configuraciones de cargas las cuales se obtendrán por un método alternativo en conjunto con otro sistema de curvas que son de utilidad para la comprensión de los fenómenos electrostáticos.

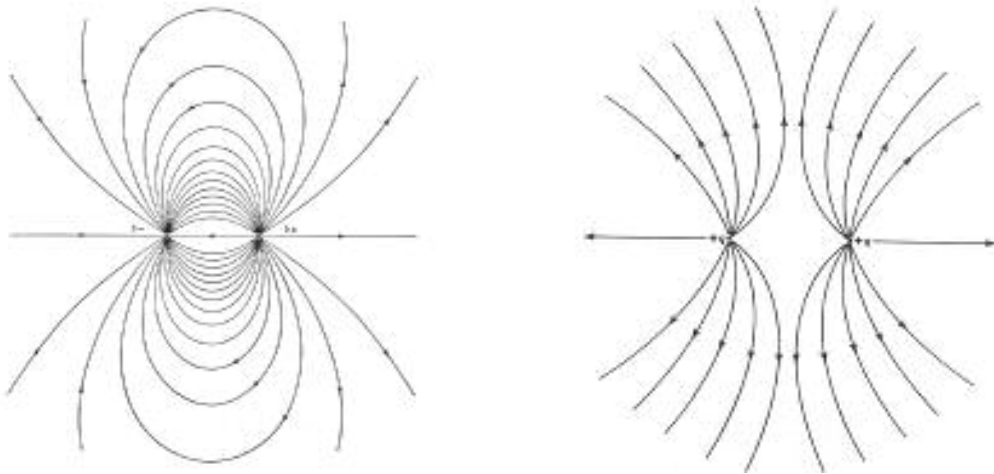


Fig. II.2-7. Líneas de campo eléctrico para cargas puntuales.

En general se tienen las siguientes propiedades o características de las líneas del campo eléctrico:

- 1.- El campo eléctrico emana de cargas puntuales de forma simétrica siguiendo líneas radiales en todas direcciones.
- 2.- Las líneas del campo eléctrico se inician en las cargas positivas y terminan en las positivas. Esto implica que la existencia de una carga aislada es hipotética, es decir las cargas siempre se presentan por pares como una consecuencia del principio de la conservación de la carga. Una línea de fuerza que no se cierra o termina como aquellas de las figuras II.2-6-7 se dicen que terminan en cargas muy lejanas o en el infinito.

- 3.- El campo eléctrico tiene la dirección de la tangente a la curva imaginaria construida por las líneas de fuerza en cada punto de espacio.
- 4.- En cada punto del espacio puede pasar sólo una línea del campo eléctrico que representa el campo resultante. Como corolario se puede establecer entonces que las líneas del campo eléctrico no se pueden cruzar o solapar, pues de lo contrario habría más de una solución para el campo eléctrico en ese punto del espacio y esto implicaría la invalidez del principio de superposición.
- 5.- Cuando el campo eléctrico es nulo entonces no hay fuerza y no se puede representar una línea de fuerza. Se dice entonces que este sitio es un punto de equilibrio o neutro.
- 6.- Las líneas del campo eléctrico están más agrupadas en las regiones en donde la magnitud del campo eléctrico es mayor y viceversa. Esto se puede notar obviamente en las cargas puntuales.

Con las líneas del campo eléctrico se pueden hacer estimaciones cuantitativas de la magnitud del campo eléctrico. Para entender como se procede de esta manera, consideremos las cargas puntuales de la figuras II.2-6, si trazamos una superficie esférica imaginaria de radio r alrededor de la carga y consideramos que por cada línea se tiene un campo, entonces podemos aseverar que el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan esta esfera es:

$$N = E A = E 4 \pi r^2 = 4 \pi D_e q \quad (\text{II.2-26})$$

La densidad de líneas esto es, el número de líneas que por unidad de área atraviesan la superficie imaginaria en el espacio alrededor de la carga viene definida como:

$$E = \frac{N}{A} \quad (\text{II.2-27})$$

Entonces es claro que la densidad de líneas es equivalente al campo eléctrico y a medida que nos alejamos de la carga el campo disminuye y la densidad de líneas disminuye. En tanto que el número de líneas es proporcional a la carga y permanece constante.

Cuando se tiene una configuración de cargas que produce un campo no uniforme o de mayor complejidad y consideramos las líneas que atraviesan un elemento de área como se muestra en la figura II.2-8, se tiene por simple extensión de la ec. II.2-26 que el diferencial de líneas viene dado por:

$$dN = E_n dA = E dA_{\perp} = E dA \cos \phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (\text{II.2.28})$$

El número total de líneas que atravesarían un área total A es entonces:

$$N = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (\text{II.2.29})$$

En los procesos físicos en donde existe un transporte de materia como por ejemplo en los procesos hidrodinámicos en los cuales ocurre un transporte de fluido por una tubería, o bien en los procesos mecánicos corpusculares en los cuales ocurre un transporte de partículas por una sección transversal; se acostumbra definir una variable física que representa la cantidad de materia transportada por unidad de área y por unidad de tiempo. Esta variable física se denomina flujo material. En los fenómenos en donde ocurre una acción a distancia como lo son la gravedad y la electricidad, también se puede expresar la

misma variable pero ahora no en términos de transporte de materia sino de flujo de campo y el cual no involucra el movimiento de nada material. Este concepto introducido por primera vez en electricidad por C. F. Gauss y denominado flujo del campo eléctrico, aún cuando consiste en el número de líneas del campo eléctrico, es un concepto físico más apropiado y como veremos en el capítulo II.3 representa un transporte de energía.

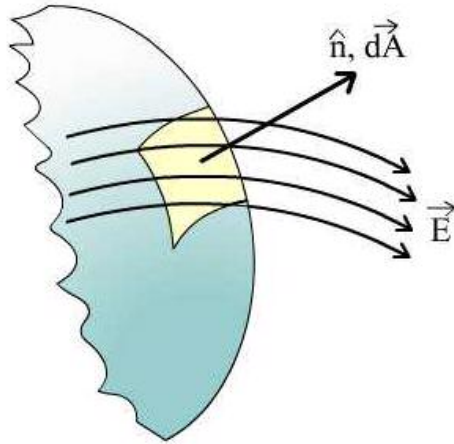


Fig. II.2-8. Número de líneas de campo eléctrico

Supongamos que en una región del espacio existe un vector campo eléctrico E_j que obedece la ley del inverso al cuadrado de la distancia, se puede escribir el flujo debido a éste campo eléctrico E_j a través de una sección transversal a_j , cuya normal hace un ángulo θ con la línea del campo eléctrico, como:

$$\varphi_j = \vec{E}_j \cdot a_j \quad (\text{II.2-30})$$

Si consideramos una superficie A la cual puede ser dividida en N secciones a_j como se muestra en la figura II.2-9, entonces el flujo total a través de esa superficie sería:

$$\Phi = \sum_j^N \varphi_j = \sum_j^N \vec{E}_j \cdot a_j \quad (\text{II.2-31})$$

Haciendo tender a cero el tamaño de las secciones entonces se tendría que:

$$\Phi = \lim_{a_j \rightarrow 0} \sum_j^N \vec{E}_j \cdot a_j = \iint_A |\vec{E}| |d\vec{a}| \cos \theta (\vec{E}, \vec{a}) \quad (\text{II.2-32})$$

En la evaluación de la integral de superficie se puede, similarmente al caso del número de líneas, interpretar como la proyección del campo sobre la dirección de la sección transversal o viceversa resultando en un escalar. En cualquier caso la dirección del vector \vec{n} representa la normal saliente a la superficie. Si la superficie es cerrada, en estas circunstancias se dice que el flujo sale de la superficie. Si la superficie es abierta entonces

el sentido del vector \mathbf{n} determina el signo del flujo al atravesar la superficie. Por convención el sentido positivo de \mathbf{n} se toma mediante la regla de la mano derecha. Esta es, se toma la superficie con los dedos circulando alrededor de la superficie en sentido antihorario si se quiere un flujo positivo. La dirección del pulgar indicaría la dirección del vector \mathbf{n} .

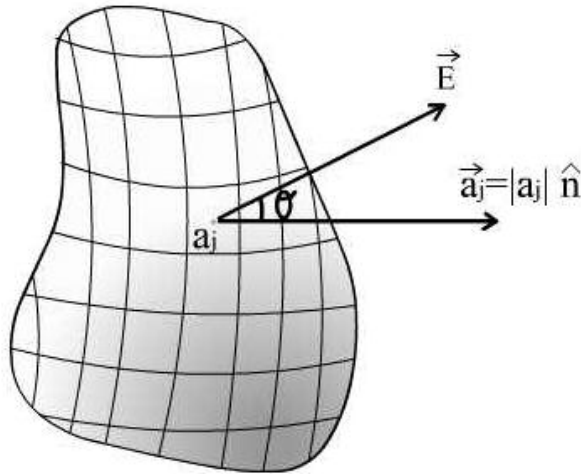


Fig. II.2-9. Definición del flujo del campo eléctrico

Analizemos ahora el flujo producido por una carga q puntual a través de dos superficies alrededor de ella encerrándola completamente, una es esférica de radio r y la otra de forma arbitraria. Como se observa en la figura II.2-10, tomamos dos parches de áreas: a en la superficie esférica obviamente a una distancia r ; y la otra de área A a una distancia R en la arbitraria. Si denominamos E_r y E_R los campos eléctricos a las distancias radiales r y R respectivamente, entonces el flujo a través de los parches es:

$$\Phi_r = \vec{E}_r \cdot \vec{a} = E_r a \cos \theta = E_r a \quad (\text{II.2-33})$$

$$\Phi_R = \vec{E}_R \cdot \vec{A} = E_R A \cos \theta \quad (\text{II.2-34})$$

Cuando se estudian flujos a través de superficies subtendidas por un cono en el espacio se denomina el ángulo o vértice del cono como ángulo sólido. Si el área subtendida es un diferencial de área dS cuya normal a una distancia r hace un ángulo θ con la bisectriz del cono entonces el ángulo sólido se define matemáticamente de la forma:

$$d\Omega = \frac{\hat{n} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (\text{II.2-35})$$

Así que para las dos superficies a y A se tiene que el ángulo sólido es el mismo y de la forma:

$$d\Omega = \frac{a \cos \theta}{r^2} = \frac{A \cos \theta}{R^2} \quad (\text{II.2-36})$$

Despejando se obtiene un área en términos de la otra:

$$A = a \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \quad (\text{II.2-37})$$

De esta expresión se deduce que al pasar de $r \rightarrow R$ el área aumenta por dos factores: $(R/r)^2$ y $(1/\cos \theta)$. Debido a la dependencia del campo con el inverso del cuadrado de la distancia el campo disminuye por el factor $(r/R)^2$, en consecuencia podemos escribir para el flujo a través de la superficie arbitraria:

$$\Phi_R = E_R A \cos \theta = E_r \left(\frac{r}{R} \right)^2 a \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \cos \theta = E_r a = \Phi_r \quad (\text{II.2-38})$$

Demostrándose así que el flujo a través de los parches es el mismo. Dado que los parches son arbitrarios entonces el flujo total a través de las dos superficies, la esférica y la arbitraria, debe ser el mismo.

Puesto que el flujo para la superficie esférica es:

$$\Phi_r = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_r dA \cos 0^\circ = E_r \oint dA = E_r 4\pi r^2 = 4\pi D_e q \quad (\text{II.2-39})$$

Entonces el flujo a través de la superficie arbitraria es independiente de la superficie y dependiente solamente de la carga dentro de la superficie cerrada.

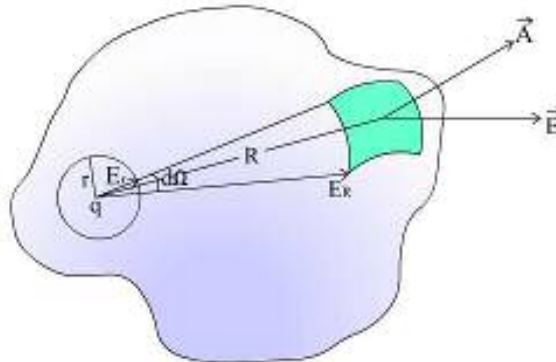


Fig. II.2-10. Flujo del campo eléctrico para una carga puntual rodeada por una superficie esférica y otra arbitraria.

Ahora consideremos que la carga yace fuera de la superficie cerrada como en la figura II.2-11a. Si empleamos el concepto de línea de campo eléctrico es fácil ver que por

cada línea que entra en la superficie S_1 ésta también sale en S_2 ya que ambas subtienden el mismo ángulo sólido. Si estas líneas de fuerza representan el flujo entonces podríamos decir que el flujo que entra por S_1 sale por S_2 es decir:

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{II.2-40})$$

Obsérvese que este resultado establece que el flujo neto a través de esta superficie es cero, pero esto no implica que el campo dentro de la superficie sea nulo. Una manera equivalente de demostrar lo mismo es encerrando la carga como se muestra en la figura II.2-11b. Si reducimos a cero el ombligo que une las superficies S_1 y S_2 y denominamos a la superficie que comprende el ombligo como S_3 , entonces cuando $S_3 \rightarrow 0 \Rightarrow \phi_3=0 \Rightarrow \phi_2=0$. Si la superficie es de forma tal que el flujo posee múltiples entradas y salidas como se aprecia en la figura II.2-11c es posible aún demostrar que los flujos se compensan siempre por pares de acuerdo con la ec. II.2-40 quedando solamente aquel correspondiente a la carga encerrada. Como corolario se puede enunciar que:

“El flujo a través de una superficie cerrada que no encierra carga es nulo”

Basándose en los resultados de estas cuatro demostraciones C. F. Gauss enuncia un teorema hoy día establecido como ley de Gauss que rige así:

“El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es independiente de la superficie y depende solamente de la carga neta encerrada por la superficie y de la constante del sistema de unidades”:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4 \pi D_e q_{neta} = \begin{cases} 4 \pi q_{neta} \dots cgs \\ q_{neta} / \epsilon_0 \dots MKS \end{cases} \quad (\text{II.2-41})$$

En la ley de Gauss también se puede aplicar el principio de superposición tanto en el campo eléctrico como en la carga y generalizar la ley de la forma:

Para cargas discretas:
$$\Phi = \oiint \sum_{i=1}^N (\vec{E}_i) \cdot d\vec{A} = 4 \pi K_0 \sum_{i=1}^N q_i \quad (\text{II.2-42})$$

Para distribuciones de carga:
$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4 \pi K_0 \begin{cases} \iiint \rho(r) dV \\ \iint \sigma(r) dA \\ \int \lambda(x) dx \end{cases} \quad (\text{II.2.43})$$

La superficie cerrada sobre la cual se ejecuta la integral es imaginaria y se denomina superficie gaussiana.

Para una carga puntual y una superficie gaussiana esférica como la de la figura II.2.10, si consideramos la ley como válida y deseamos a la inversa saber cual es el campo en dicha superficie se tendría que de II.2.39;

$$E_r = \frac{4 \pi K_0 q}{4 \pi r^2} = \frac{K_0 q}{r^2} \quad (\text{II.2.44})$$

Si colocamos una carga puntual de prueba q_p en la superficie de radio r ésta sería sometida a una fuerza:

$$\vec{F}_{q'} = q' \vec{E}_r = \frac{K_0 q q_p}{r^2} \hat{r} \quad (\text{II.2.43})$$

Con lo cual se obtiene la ley de Coulomb. Así que la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes y corresponden a la misma ley expresada en dos formas diferentes. Ambas leyes obedecen la ley del cuadrado del inverso de la distancia; sin embargo, la ley de Gauss es más general pues es directamente aplicable a campos que no poseen simetría esférica en tanto que la ley de Coulomb no.

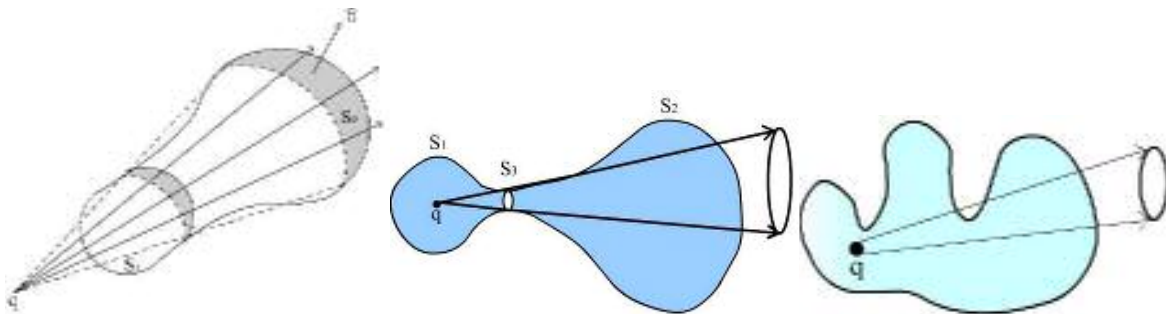


Fig. II.2-11. Flujo del campo eléctrico a través de una superficie que no encierra carga

II.2.5 Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss puede servir para inferir posibles valores del flujo y la carga. Sin embargo, tal como se procedió en las ecs. II.2-44-45 es obvio que una de las aplicaciones mas interesantes y usuales de esta ley, es en la determinación de la magnitud del campo eléctrico de una configuración o distribución de cargas compleja conocida y de simetría conocida. Esta aplicación es posible sin necesidad de ejecutar el procedimiento usual visto en la sección II.2.3 el cual involucra integrales complejas. En el proceso de aplicación de la ley de Gauss es estrictamente necesario que se satisfagan dos condiciones:

- ✓ Que la distribución de carga sea tal que el campo de acuerdo a la geometría del cuerpo posea una alta simetría.

- ✓ Escoger una superficie gaussiana apropiada que evite o simplifique la resolución de la integral.

Como regla general se pueden establecer los siguientes pasos para determinar un campo eléctrico mediante la ley de Gauss;

- 1) Escoja una superficie gaussiana acorde con la geometría del cuerpo y la simetría del campo.
- 2) Evalúe el producto escalar.
- 3) Aplique consideraciones geométricas y de simetría tal que el campo eléctrico sale de la integral o que su evaluación sea fácil.
- 4) Evalúe la carga neta encerrada solamente por la superficie gaussiana, toda carga externa a esta superficie debe ser descartada.
- 5) Despeje el campo.

A continuación se presentan algunos ejemplos típicos de distribuciones de carga.

Distribución esférica de carga uniforme.

Cuando se coloca carga de forma estática en un cuerpo de cierta geometría es de esperar que la distribución de la carga sea uniforme. Si la geometría del cuerpo presenta alta simetría esto es aún mas probable. La distribución de la carga en conductores en donde estas se pueden mover las analizaremos en el contexto de la ley de Gauss en la sección siguiente.

Las distribuciones esféricas son por lo general uniformes, en este caso podemos suponer que la simetría del campo toma la simetría geométrica del cuerpo y en consecuencia el campo dentro del cuerpo debería poseer simetría radial. En el exterior del cuerpo es de esperar que esta simetría se mantenga si no existen otros cuerpos cargados cercanos que la modifiquen.

a) Una sola esfera de radio R y densidad de carga ρ constante.

Para determinar el campo eléctrico dentro de la esfera tomamos una concha esférica de radio r y espesor encerrada por una superficie gaussiana de radio $r < R$. Puesto que la distribución es constante es factible, por lo expresado anteriormente, suponer que el campo dentro de la esfera como afuera de la esfera, posee una simetría radial, es decir el campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie y es magnitud $E_r = \text{constante}$ en cualquier punto de la superficie gaussiana. Entonces según los pasos anteriores y del lado derecho de la primera de las ecs, II.2. 43 se obtiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_r dA \cos 0^\circ = E_r \oint dA = E_r 4\pi r^2 \quad (\text{II.2-44a})$$

La carga total o neta encerrada en la concha esférica viene determinada por un elemento de volumen $dV = 4\pi r^2 \cdot dr$, así que del lado izquierdo de la primera de las ecs, II.2. 43 se obtiene que la carga total o neta encerrada por la superficie gaussiana es;

$$4\pi K_0 q_{\text{neto}} = 4\pi K_0 \rho \int 4\pi r^2 dr = (4\pi)^2 K_0 \rho \int_0^r r^2 dr = (4\pi)^3 K_0 \rho \frac{r^3}{3} \quad (\text{II.2-44b})$$

Igualando ambos términos de II.2-44 se tiene que:

$$E_r = \frac{4 \pi K_0 \rho r}{3} \quad (\text{II.2-45})$$

La ec. II.2-45 confirma así que el campo sólo depende de la carga encerrada.

Si suponemos que la esfera posee una carga total Q dada por:

$$Q = \rho V_T = \rho \frac{4 \pi R^3}{3} \quad (\text{II.2-46})$$

Despejando la densidad de carga, el campo eléctrico dentro de la esfera se puede escribir en términos de la carga total como:

$$E_r = \frac{4 \pi K_0 r^3}{3 r^2} \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{K_0 Q r}{R^3} \quad (\text{II.2-47})$$

Similarmente la carga dentro de la superficie gaussiana se puede escribir en términos de la carga total como:

$$q = 4 \pi \rho \int_0^r r^2 dr = 4 \pi \rho \frac{r^3}{3} = 4 \pi \frac{r^3}{3} \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} = Q \left(\frac{r}{R} \right)^3 \quad (\text{II.2-48})$$

Para determinar el campo fuera de la superficie esférica, el cual sigue siendo de simetría radial, se toma tiene de nuevo una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$, del lado derecho de la primera de las ecs, II.2. 43 se tiene que;

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r 4 \pi r^2 \quad (\text{II.2-49a})$$

$$4 \pi K_0 q_{\text{neta}} = 4 \pi K_0 \rho \int_0^R 4 \pi r^2 dr = 4 \pi K_0 \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{II.2-49b})$$

Igualando ambos términos en II.2-49 se obtiene para el campo eléctrico radial:

$$E_r = \frac{4}{3} \pi K_0 \left(\frac{R^3}{r^2} \right) \quad (\text{II.2-50})$$

Puesto que la superficie gaussiana ahora encierra toda la esfera, entonces la carga neta encerrada es la carga total de la esfera y el campo eléctrico se puede también escribir como:

$$E_r = \frac{K_0 Q}{r^2} \quad (\text{II.2-51})$$

Se puede observar que el campo eléctrico fuera de la distribución de carga sigue una dependencia con el inverso del cuadrado de la distancia por ello se dice que la distribución

actúa como si toda la carga estuviera en el centro de la esfera, es decir, como si la distribución fuera una carga puntual.

Si se grafican tanto la magnitud del campo eléctrico como la carga en función del radio representados en la figura II.2-12 se concluye que mientras el campo es directamente proporcional al radio la carga es proporcional al cubo, en concordancia, como era de esperarse, con la ec. II.2-43.

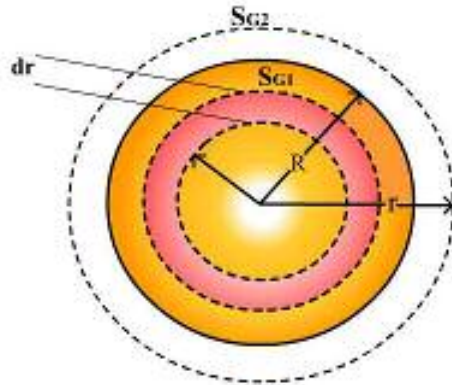


Fig. II.2-12. Esfera uniformemente cargada

b) Distribuciones de carga esféricas concéntricas.

Se tienen dos distribuciones con densidades de cargas \$+\rho_1\$ y \$-\rho_2\$ constantes distribuidas en conchas esféricas de radios interno y externo \$R_1, R_2\$ y \$R_3, R_4\$ como se ilustra en la figura II.2-13. Este es un problema hipotético por cuanto se espera que exista una distribución uniforme de la carga y al igual que en el caso anterior suponemos simetría radial en todas las regiones de estas esferas y tomamos otra esfera como superficie gaussiana.

En la región I, tomamos una superficie gaussiana \$S_1\$ de radio \$r < R_1\$, la carga neta encerrada por esta superficie es nula, así que por la ley de Gauss el flujo neto es nulo. De la ec. II.2-43 se deduce inmediatamente que:

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \oint E_{1r} 4\pi r^2 dr = E_{1r} 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_{1r} = 0 \quad (\text{II.2-52})$$

El campo es nulo tanto porque la carga neta es nula así como por la simetría del campo.

En la región II, para \$R_1 < r < R_2\$ habrá un campo eléctrico que dependerá de la carga encerrada por la superficie \$S_2\$ hasta ese radio y con densidad \$\rho_1\$. La determinación de este campo es similar al caso anterior y arroja como resultado que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r 4\pi r^2 = 4\pi K_0 q_{neta} = 4\pi K_0 \rho_1 \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3) \quad (\text{II.2-53})$$

Obteniéndose para el campo en la región II:

$$E_r = K_0 \rho_1 \frac{4}{3} \pi \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \quad (\text{II.2-54})$$

En la región III para $R_2 < r < R_3$ el campo dependerá de la carga total q_1 encerrada en la concha interior y será similar al de una carga puntual, se deja como ejercicio al lector demostrar que:

$$E_r = \frac{K_0 q_1}{r^2} = K_0 \rho_1 \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \quad (\text{II.2-55})$$

En la región IV para $R_3 < r < R_4$ el campo dependerá de la carga total encerrada en la concha interna mas la carga parcial entre la superficie gaussiana de radio r y el radio R_2 , así que la ec. II.2-43 se tiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r 4\pi r^2 = 4\pi D_e q_{\text{neta}} = q_1 + \int_{R_3}^r \rho_2 dV = 4\pi K_0 \frac{4}{3} \pi \left[\rho_1 (R_1^3 - R_2^3) - \rho_2 (r^3 - R_3^3) \right] \quad (\text{II.2-56})$$

Obteniéndose para el campo en esta región la expresión:

$$E_r = K_0 \frac{4}{3} \pi \frac{\left[\rho_1 (R_1^3 - R_2^3) - \rho_2 (r^3 - R_3^3) \right]}{r^2} \quad (\text{II.2-57})$$

Finalmente en la región V para $r > R_4$ de nuevo el campo es $E_{R_4} \propto 1/r^2$ como si toda la carga $q = q_1 + q_2$ estuviera en el centro de las dos esferas. La obtención de este campo se deja al lector como ejercicio.

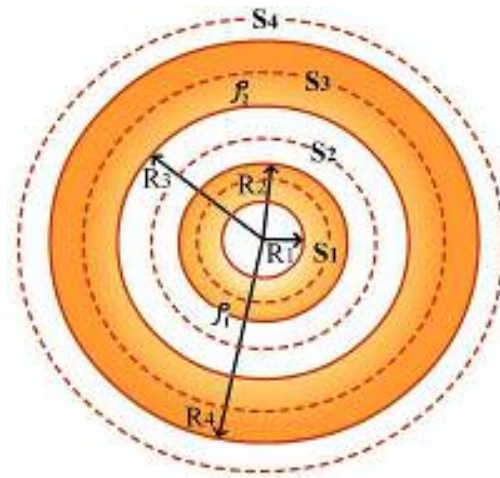


Fig. II.2-13. Conchas esféricas concéntricas uniformemente cargadas

Distribución de carga lineal.

Considérese una carga lineal de densidad λ en un hilo de longitud infinita y espesor despreciable. Debido a que el alambre es infinito es de esperar que la simetría del campo eléctrico sea radial. Esto requiere que la superficie gaussiana sea un cilindro de longitud L y radio r encerrando al alambre. También es lógico suponer que la magnitud del campo

dependerá solo del radio y en consecuencia es el mismo en cualquier punto de la superficie gaussiana. Así que por aplicación del lado derecho de la tercera ec. II.2-43 se tiene que:

$$\Phi = \Phi_{tapas} + \Phi_{periferia} = 2 \int E_r dA \cos 90^\circ + \int E_r dA \cos 0^\circ = E_r \int 2\pi r dl = E_r 2\pi r \int dl = E_r 2\pi r L \quad (\text{II.2-58a})$$

Es notorio destacar que el flujo por las tapas es nulo. En tanto que por aplicación del lado izquierdo de la tercera ec. II.2-43 se tiene que:

$$4\pi K_0 q_{neta} = 4\pi K_0 \int_0^L \lambda dl = 4\pi K_0 \lambda L \quad (\text{II.2-58b})$$

Igualando ambos términos de II.2-58:

$$E_r = \frac{2 K_0 \lambda}{r} \quad (\text{II.2-59})$$

Obsérvese que el campo no depende de la longitud del cilindro de la superficie gaussiana como era de esperarse.

Para una distribución de carga cilíndrica infinita la simetría del campo es también radial y por lo tanto se toma una superficie gaussiana cilíndrica, pero se debe tener cuidado de tomar correctamente la carga encerrada por la superficie gaussiana en la distribución de carga.

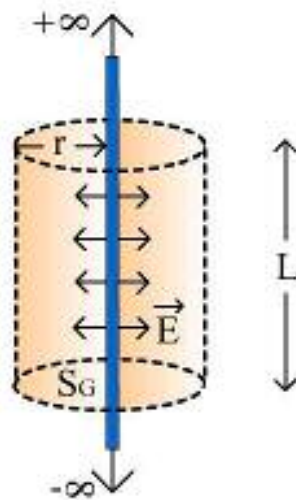


Fig. II.2-14. Distribución de carga lineal uniforme: hilo infinito.

Distribución de carga superficial en una placa plana delgada infinita no-conductora.

La distribución de carga superficial se denota por una densidad de carga superficial σ y debido a que la placa es infinita el campo debería ser independiente de la posición en frente de la placa a la cual se quiere determinar. Por lo tanto existe una simetría del campo eléctrico y éste debe ser normal a la superficie. Este tipo de simetría conduce a considerar como superficie gaussiana una de forma cilíndrica arbitraria atravesando la superficie plana

cuya sección transversal S y longitud L son irrelevantes tal como se presenta en la fig. II.2-15. El flujo a través de la superficie gaussiana consta del flujo por la periferia mas el flujo por las tapas el cilindro. Por aplicación de la segunda de las ecs. II.2-43 tenemos entonces que;

Lado izquierdo:

$$\Phi = \Phi_{periferia} + \Phi_{tapas} = E_r 2\pi r L \cos 90^\circ + 2 E_r S \cos 0^\circ = 2 E_r S \quad (\text{II.2-60a})$$

Lado derecho:

$$4 \pi K_0 q_{neta} = 4 \pi K_0 \oint \sigma dA = 4 \pi K_0 \sigma S \quad (\text{II.2-60b})$$

Igualando ambos lados de II.2-60:

$$E_r = \frac{4 \pi K_0 \sigma}{2} = 2 \pi K_0 \sigma \quad (\text{II.2-61})$$

Obsérvese que el campo es independiente de la longitud del cilindro es decir de la distancia a la cual se evalúa el campo y por lo tanto es uniforme. Este resultado coincide con el que se obtendría de la ec. II.1-40a.

Si se tienen dos placas no-conductoras paralelas separadas a una distancia d mucho menor que las dimensiones de las placas y las cuales poseen densidades de carga σ de signo opuesto; se puede considerar que cada placa produce un campo determinado por la ec. II.2-61. Así que, por el principio de superposición aplicado en la ley de Gauss el campo entre las placas vendría dado por:

$$E_r = 4 \pi K_0 \sigma \quad (\text{II.2-62})$$

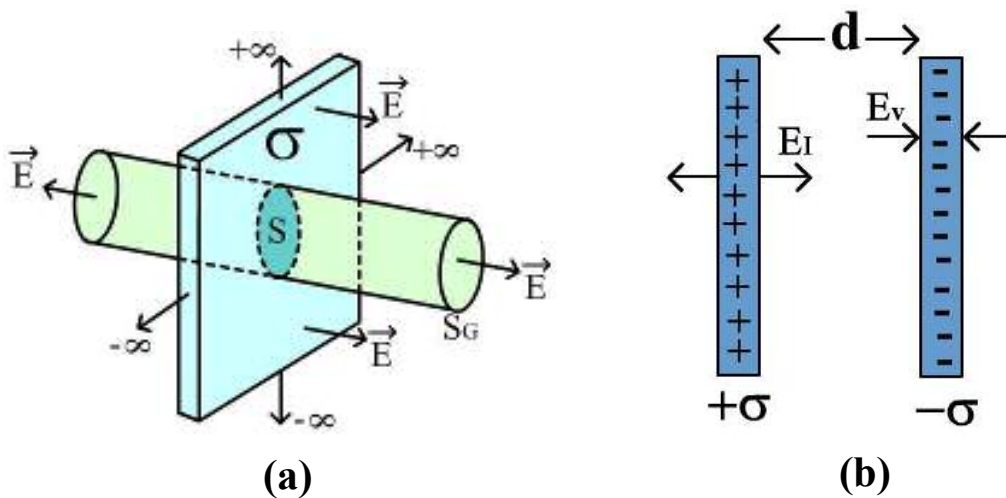


Fig. II.2-15. Distribución de carga superficial, a) un plano, b) dos planos paralelos.

II.2.6 Ley de Gauss en forma diferencial

Cando se evalúa el flujo sobre una superficie cerrada es posible expresarlo también en términos del volumen encerrado por la superficie. Para cumplir este objetivo se deben tomar en cuenta en la ec. II.2-41 no sólo los elementos de superficie de los parches externos sino también los elementos de volumen internos. Así que ésa ecuación se puede escribir de la forma:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{A}_i = \sum V_i \left[\int_{S_i} \frac{\vec{E} \cdot d\vec{A}_i}{V_i} \right] \quad (\text{II.2-61})$$

En el límite $N_i \rightarrow \infty$, $V_i \rightarrow 0$, se puede demostrar matemáticamente que:

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \int_{S_i} \frac{\vec{E} \cdot d\vec{A}_i}{V_i} = \nabla \cdot \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \quad (\text{II.2-62})$$

Este resultado se conoce como teorema de la divergencia.

Así que de II.2-61 y II.2-62 se deduce que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^N V_i \nabla \cdot \vec{E} = \iiint (\nabla \cdot \vec{E}) dV \quad (\text{II.2-63})$$

Esta expresión se conoce como teorema de Green o teorema de Gauss en forma diferencial y es aplicable en situaciones en las cuales se conoce el campo pero no la distribución que lo produce. Si igualamos los lados derechos de las ecs. II.2-63 y la primera de las ecs. II.2-43 se tiene que para una distribución de carga volumétrica:

$$\iiint (\nabla \cdot \vec{E}) dV = 4 \pi D_e \iiint \rho dV \quad (\text{II.2-64})$$

Las integrales se ejecutan sobre el mismo volumen y por lo tanto se cumple que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4 \pi K_0 \rho \quad (\text{II.2-65})$$

Esta es una de las ecuaciones propuestas por Maxwell para explicar todos los fenómenos eléctricos en la materia y en el espacio libre.

II.2.7 Concepto de potencial eléctrico y energía potencial eléctrica

El concepto de diferencia y valor absoluto de potencial eléctrico que introduciremos en este capítulo es válido en condiciones de equilibrio o electrostáticas, en el capítulo II.4 se definirá el mismo concepto en condiciones dinámicas. Este concepto puede ser introducido de dos maneras: Física y matemáticamente.

II.2.7.a Concepto Físico de potencial

Con el fin de derivar conclusiones acerca del trabajo de la fuerza electrostática supongamos que poseemos una carga puntual positiva de magnitud q y se quiere determinar el trabajo que nos tomaría desplazar una carga de prueba q_0 entre dos puntos A y C en el espacio en donde actúa el campo eléctrico producido por la carga q tal como se muestra en la figura II.2-16. Para determinar este trabajo y encontrar sus características lo haremos por dos caminos diferentes. El primer camino es el trayecto $A \rightarrow B \rightarrow C$ siguiendo una línea de fuerza radial y luego a lo largo del círculo de radio r_C . El segundo camino es curvilíneo escogido de forma arbitraria.

Mediante el concepto de trabajo expresado en la parte I de esta serie, podemos escribir para el primer camino;

$$W_{A \rightarrow C} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.2-66})$$

Para evaluar los productos escalares definimos dos vectores unitarios \hat{u}_r y \hat{u}_θ a lo largo de las direcciones radial y angular respectivamente mutuamente perpendiculares tal que los vectores fuerza y desplazamiento son:

$$\vec{F} = -q_0 \vec{E} = -q_0 \frac{K_0 q}{r^2} \hat{u}_r \quad (\text{II.2-67})$$

$$d\vec{l} = d\vec{r} + d\vec{s} = dr \hat{u}_r + ds \hat{u}_\theta \quad (\text{II.2-68})$$

Dado que la carga de prueba es positiva la fuerza que se debe aplicar para desplazar la carga en condiciones electrostáticas a velocidad constante es exactamente de igual magnitud pero de sentido contrario a la del campo eléctrico de la carga q . Si la carga no se desplaza a velocidad constante, entonces la carga tendría una aceleración igual a su fuerza resultante la cual sería desconocida. En el caso cuando liberamos la carga y dejamos el campo que actúa sólo, entonces no sólo estaría la carga acelerada sino que no estaríamos determinando el trabajo que debemos hacer sino el trabajo hecho por el campo.

Entonces reemplazando II.2-67,68 en II.2-66 el trabajo total es:

$$W_{A \rightarrow C} = -q_0 \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \frac{D_e q q_0}{r^2} (\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r) dr - \int_B^C \frac{D_e q q_0}{r^2} (\hat{u}_r \cdot \hat{u}_\theta) \quad (\text{II.2-69})$$

En el tramo A→B→ sólo hay desplazamiento radial en tanto que en el tramo B→C sólo hay desplazamiento angular y como $u_r \perp u_\theta$ el segundo término es nulo y el trabajo queda finalmente como:

$$W_{A \rightarrow C} = - \int_{r_A}^{r_C} \frac{K_0 q q_0}{r^2} dr = K_0 q q_0 \left[\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (\text{II.2-70})$$

Obsérvese que siendo $r_A < r_C$ el trabajo es negativo, esto concuerda con el hecho de que la fuerza siempre es opuesta al desplazamiento para poder mover a la carga con velocidad constante. Lo contrario ocurriría si hubiésemos movido la carga desde C→A en contra del campo eléctrico.

Para el trabajo en el segundo camino lo dividimos en N segmentos diferenciales radiales y angulares, de forma tal que el trabajo es ahora;

$$W_{A \rightarrow C} = -q_0 \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \left(- \int q_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{l}_i \right) = -q_0 \sum_{i=1}^N \int E_i \cdot (dr \hat{u}_r + ds \hat{u}_\theta) \quad (\text{II.2-71})$$

Pero sólo se hace trabajo en los segmentos radiales, así que la ec. II.2-71 queda de la forma;

$$W_{A \rightarrow C} = -q_0 \sum_{i=1}^N \int_{r_i}^{r_{i+1}} E_{r_i} dr_i = K_0 q q_0 \left[\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (\text{II.2-72})$$

Se ha así demostrado que el trabajo bajo la acción de fuerzas electrostáticas es independiente del camino y sólo depende de los puntos extremos. Aún cuando esta demostración se ha realizado bajo la acción del campo eléctrico de una carga puntual es perfectamente válido para campos eléctricos de cualquier complejidad. La independencia del trabajo con el camino es característica de fuerzas conservativas por lo cual podemos concluir que la fuerza del campo eléctrico es una fuerza conservativa. Esto era de esperarse ya que la interacción electrostática o de Coulomb es una ley dependiente del inverso del cuadrado de la distancia.

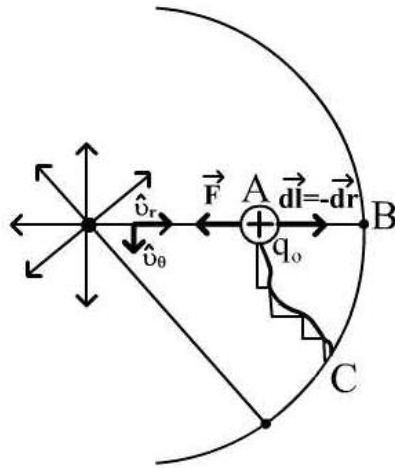


Fig. II.2-16. Trabajo en mover una carga bajo la acción de un campo eléctrico

Mediante la aplicación del principio de conservación de la energía podemos analizar en qué se convierte el trabajo. Si la carga se mueve libremente el trabajo se convierte en energía cinética y ésta a su vez se puede convertir en calor², pero también el trabajo se puede convertir en energía química o en otras más complejas. Dado que estamos en condiciones electrostáticas, cargas en reposo o a velocidad constante, no existen variaciones en la energía cinética. Si otros procesos energéticos están ausentes, entonces por analogía con la interacción gravitacional es obvio suponer que el trabajo se convierte en una variación de la energía potencial de las cargas del sistema unas con respecto a las otras y la cual de ahora en adelante la denominaremos *energía potencial eléctrica* U_E . De forma que de la ec. II.2-69 o lo que es lo mismo de la II.2-70 energéticamente se puede generalizar que el trabajo para mover una carga entre dos puntos cualesquiera 1 y 2 y para cualquier camino se puede escribir como:

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q_0 \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta U_E = U_E(2) - U_E(1) \quad (\text{II.2-73})$$

Si ahora se quiere que el trabajo sea independiente de la carga de prueba entonces la ec. II.2-73 se divide por la magnitud de ésta carga para obtener que:

$$\frac{W_{1 \rightarrow 2}}{q_0} = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\Delta U_E}{q_0} = \Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (\text{II.2-74})$$

Esta expresión la cual consiste en el *trabajo por unidad de carga* o la *variación de la energía potencial de las cargas por unidad de carga* también se define como *variación o diferencia del potencial eléctrico* y constituye el método físico.

Para obtener la energía potencial eléctrica o el potencial eléctrico en un punto consideramos al punto C en el infinito y traemos a la carga de prueba desde el infinito hasta el punto A, de la ec. II.2-73 el trabajo es positivo e igual a:

² Este proceso de conversión de energía se analizará en el capítulo II.4

$$W_{\infty \rightarrow A} = \frac{K_0 q q_0}{r_A} \quad (\text{II.2-75})$$

Entonces la energía potencial eléctrica y el potencial eléctrico en A se obtienen directamente de II.2-75;

$$\frac{W_{\infty \rightarrow A}}{q_0} = \frac{U_A}{q_0} - \frac{U_\infty}{q_0} = \varphi_A - \varphi_\infty = K_0 q \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty} \right] \quad (\text{II.2-76})$$

De acuerdo con esta ecuación podemos asociar el segundo término con la energía potencial por unidad de carga o potencial eléctrico en el infinito tomándolos como referencia e igual a cero, tal que si $r_C \rightarrow \infty$, $U_C \rightarrow 0$ y $\varphi_C \rightarrow 0$. Con el infinito como referencia el potencial en un punto se conoce como potencial absoluto en ese punto o simplemente potencial. El concepto de potencial absoluto tomando el infinito como referencia desde un enfoque matemático es preciso pero difícil de manejar y de poca utilidad práctica. Cualquier otro valor diferente de cero podría servir como referencia, pero el valor cero hace el concepto de potencial en un punto de carácter algebraicamente absoluto aquí en el planeta Tierra. Considerando a nuestro planeta como un objeto cargado en el universo, es una tarea muy difícil estimar la carga y de aquí el potencial de la Tierra. En el capítulo II.1 se mencionó que la Tierra posee una capacidad casi infinita de almacenar carga³ así que ésta se acerca a un cuerpo cuyo potencial eléctrico es cercanamente cero y esto nos permite considerar a la Tierra como un punto de referencia de potencial arbitrario. De mutuo acuerdo entre la comunidad científica se le asigna a la Tierra un potencial eléctrico nulo. En lo sucesivo cuando un conductor sea conectado con la Tierra se referirá a ésta como la tierra⁴ o *toma de tierra* y se describirá mediante el símbolo .

En resumen se tiene las siguientes definiciones que constituyen una metodología para la obtención de la energía y el potencial eléctrico a partir del conocimiento del campo eléctrico;

Energía potencial eléctrica en un punto P del espacio:

$$U_{E(P)} = -q_0 \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.2-77a})$$

Potencial eléctrico en un punto P del espacio:

$$\varphi_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.2-77b})$$

Diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos 1 y 2 en el espacio:

³ La capacidad de almacenamiento de carga será estudiada en el capítulo II.3

⁴ En minúsculas

$$\Delta\varphi = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.2-77c})$$

Unidades del potencial y la energía eléctrica

Se deriva de las ecs. II.2-74 y II.2-77b que las unidades del potencial absoluto o la diferencia de potencial eléctrico son:

Energía/Carga=Fuerza-distancia/Carga. En el sistema MKS corresponde a Joules/C y recibe el nombre de Voltio (abreviado V), en tanto que en el ues-CGS corresponde a Ergios/StatC y se denomina StatVoltio (abreviado statV). Haciendo las respectivas conversiones es fácil demostrar que 1 StatVoltio= 300 Voltios. Se acostumbra denominar a la diferencia de potencial eléctrico como voltaje, pero este concepto es más útil cuando se involucra el movimiento de las cargas, tal como veremos en el capítulo II.4.

Las unidades de la energía potencial y el trabajo obviamente son Joules y Ergios en los sistemas MKS y cgs-ues respectivamente. Sin embargo, de la ec. II.2-74 se deriva que las unidades también pueden ser el producto carga-x-Voltios. Si tomamos como unidad de carga la unidad elemental y como unidad de diferencia de potencial el voltio, entonces se tendría una unidad de carga equivalente a la energía necesaria para hacer un trabajo sobre un electrón bajo la diferencia de potencial de 1 voltio denominada *electrón-voltio* (abreviado *eV*) y equivalente a:

$$1 \text{ eV} = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1 \text{ Joule/C}) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Joules} = 1.602 \times 10^{-12} \text{ Ergios}$$

Esta unidad es apropiada para la determinación de procesos energéticos electrostáticos que involucraría cierto número de electrones, o de cargas equivalentes, o correspondientes a potenciales elevados del orden de keV. Pero se emplea también comúnmente en la determinación de energías desarrolladas en interacciones atómicas y nucleares las cuales son del orden de MeV y GeV.

Las integrales dadas por la ecs. II.2-74 y II.2-77 se denominan integrales de línea. Si evaluamos estas integrales de líneas entre dos puntos 1 y 2 por dos caminos arbitrarios diferentes como se muestra en la figura II.2-17, sabemos que por cuanto las fuerzas electrostáticas son conservativas se tiene que:

$$\int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l})_I = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l})_{II} \quad (\text{II.2-78})$$

$$\text{Pero como: } \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l})_{II} = - \int_2^1 (\vec{E} \cdot d\vec{l})_{II} \quad (\text{II.2-79})$$

Entonces reemplazando II.2-79 en II.2-78 se tiene después de re-arreglar términos que:

$$\int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l})_I + \int_2^1 (\vec{E} \cdot d\vec{l})_{II} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{II.2-80})$$

Nótese que el mismo resultado se pudo haber alcanzado del lado derecho de la ecuación II.2-74 ya que como en un ciclo o bucle los puntos inicial y final son los mismos, entonces

los potenciales son iguales. La ecuación II.2-80 indica que la integral de línea del campo eléctrico en un ciclo arbitrario, también conocida como circulación del campo eléctrico, es siempre nula. Esto tiene el siguiente significado físico:

“Cualquier partícula cargada que ejecute un movimiento en un ciclo bajo la acción de campos electrostáticos no varía de energía ni de potencial”.

El potencial es un escalar y como tal no se le asigna dirección ni sentido. Debido a que matemáticamente es más fácil manejar escalares que vectores analíticamente, en algunos casos es muy conveniente desde un punto de vista práctico usar este nuevo concepto físico como método de descripción de los fenómenos eléctricos que el concepto de campo eléctrico.

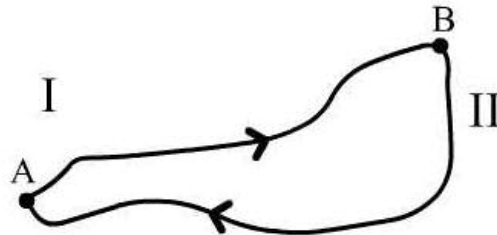


Fig. II.2-17. Circulación del campo eléctrico

II.2.7.b Concepto matemático de potencial: Cálculo u obtención del campo a partir del potencial eléctrico y viceversa

El campo eléctrico puede ser deducido matemáticamente a partir del potencial eléctrico; de hecho el potencial como un concepto matemático fue propuesto por primera vez por G. Green en 1898. La ecuación II.2-74 y sus equivalentes en forma integral pueden ser puestas en forma diferencial, para ello se diferencia ambos lados de esta ecuación y se desarrolla el producto escalar para obtener;

$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\sum_{i=1}^3 E_{u_i} du_i \quad (\text{II.2-81})$$

siendo u_i componentes a lo largo de los vectores unitarios i, j, k .

Si ϕ representa una función de las tres coordenadas, entonces cada componente en el producto escalar cumple separadamente que:

$$\frac{d\phi}{du_i} = -E_{u_i} \quad (\text{II.2-82})$$

Dado que el campo eléctrico es un vector entonces el lado izquierdo de la ec. II.2-82 representa la componente de la diferencial de la función a lo largo de cada uno de los ejes coordenados. Pero si tomamos en cuenta la dependencia de ϕ en las tres variables x, y, z las diferenciales se convierten derivadas parciales y II.2-82 se puede representar en forma vectorial como:

$$\vec{E} = - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right] = - \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{II.2-83})$$

De la ec. II.2-83 se deriva una nueva unidad para el campo eléctrico, la cual casualmente es la más empleada: Voltios/metro en el sistema MKS o práctico y StatVoltios/cm en el ues-cgs.

La ec. II.2-83 representa una función vectorial “gradiente de φ ” o simplemente *vector gradiente de potencial* y determina la dirección de variación máxima de φ a lo largo de determinada dirección y es igual al campo eléctrico en magnitud dirección y sentido. Esta ecuación permite evaluar el campo eléctrico a partir del conocimiento de la forma funcional o variación del potencial en el espacio con respecto a las variables coordenadas. Si ahora utilizamos el teorema de la divergencia para una distribución de carga volumétrica, entonces reemplazando II.2-83 en II.2-65 se obtiene que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left[- \vec{\nabla} \varphi \right] = 4 \pi D_e \rho \quad (\text{II.2-84})$$

Pero desarrollando el producto escalar se demuestra inmediatamente que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \varphi \right] = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{II.2-85})$$

El operador funcional ∇^2 (nabla cuadrado) también se conoce como *operador Laplaciano*. Mediante la ec. II.2-85 la ec. II.2-84 se puede escribir como:

$$\nabla^2 \varphi = - 4 \pi K_0 \rho \quad (\text{II.2-86a})$$

Pero si el espacio no posee densidad de carga, entonces;

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{II.2-86b})$$

La ecs. II.2-86 son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y se conocen respectivamente como ecuación de Poisson y ecuación de Laplace. Ambas expresiones son ecuaciones fundamentales de la electrostática (y también de la electrodinámica) y permiten resolver cualquier problema electrostático con o sin carga, para luego obtener el potencial y de éste el campo eléctrico. La solución de estas ecuaciones, conocidas las condiciones iniciales o de frontera del problema, también permite obtener toda la información necesaria para atacar cualquier situación de equilibrio o desequilibrio. Los métodos de solución de éstas ecuaciones son tema de discusión de textos más avanzados de la electrostática y la electrodinámica.

II.2.8 Potencial producido por una configuración de cargas discretas y puntuales

En esta sección se presentarán los procedimientos para determinar el potencial eléctrico de configuraciones de cargas discretas. La metodología será una simple extensión de lo obtenido para una carga puntual y siguiendo lineamientos similares a los ya presentados en las secciones I.1.7 y II.2.2. Algunos de los conceptos allí definidos serán empleados sin mayores detalles o referencias en esta sección.

La generalización del potencial eléctrico para un sistema de N cargas discretas y puntuales sigue directamente de la aplicación del principio de superposición en el campo eléctrico dado por la ec.II.2-3 dentro de las ecs. II.2-77 para cada una de las cargas puntuales del sistema, y así que se puede escribir que:

$$\varphi_P = -\int_{\infty}^P \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{l} = -\sum_{i=1}^N \int_{\infty}^P \left(\frac{K_0 q_i \hat{r}_i}{r_i^2} \right) \cdot d r_i \hat{r}_i = -\sum_{i=1}^N K_0 q_i \int_{\infty}^P \frac{d r_i}{r_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{K_0 q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^N \varphi_i \quad (\text{II.2-87})$$

En donde el radio vector unitario es a lo largo de la línea que une las cargas puntuales y expresado por la ec. II.1-6. Obsérvese que el resultado es también una simple generalización de la ec. II.2-76.

Similarmente siguiendo la misma metodología para la energía potencial del sistema de cargas discretas, se suman todas las energías en traer 1, 2, 3... N-1 cargas en frente de la primera, N-2 cargas en frente de la segunda y así sucesivamente, de forma que podemos escribir:

$$U_E = -\sum_{j=1}^N q_j \int_{\infty}^P \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{i \neq j}^N \frac{K_0 q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i,j}^N \frac{K_0 q_i q_j}{2 r_{ij}} = \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i \varphi_j}{2} = \sum_{i \neq j}^N U_{e(i,j)} \quad (\text{II.2-88})$$

En donde la doble sumatoria sobre los índices i y j permite la permutación de los índices pero no su repetición.

II.2.9 Determinación de la energía potencial y el potencial eléctrico en una distribución continua de carga

En esta sección se presentarán los procedimientos para determinar el potencial eléctrico de configuraciones de cargas conformadas por una distribución continua conocida. De nuevo como en la sección anterior se seguirán lineamientos similares a los ya presentados en las secciones II.1.7 y II.2.3 empleando conceptos allí definidos. Mayores detalles o referencias se encuentran en esas secciones.

Si se tiene una distribución continua de carga bien sea lineal, superficial o volumétrica, sobre un cuerpo determinado y consideramos dentro de ésta un elemento de carga dq , éste se puede considerar como una carga puntual. Entonces en la base de la ecuación II.2-87 se puede decir que éste elemento de carga produce en un punto P del espacio un elemento de potencial eléctrico campo $d\phi$ el cual de acuerdo con la figura II.2-2 viene dado por:

$$d\phi = K_0 \frac{dq}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad (\text{II.2-89})$$

De forma similar a como se procedió en la sección II.1.7b y en la II.2.3 la distribución de carga puede estar contenida en un elemento de volumen, área o longitud tal que el elemento de carga viene expresado por la ec. II.1-16. Entonces, se tendrán las distribuciones dadas por las ecs. II.1-12 y por lo tanto el potencial eléctrico en el punto P se puede evaluar por integración de la ec. II.2-89 siempre y cuando la condición de $\phi=0$ en el infinito sea aplicable. Como resultado se obtiene que las integrales son similares a las II.2-5 y de la forma:

$$\phi_P = K_0 \left\{ \begin{array}{l} \iiint \frac{\rho(r) dV}{|\vec{R} - \vec{r}|} \\ \iint \frac{\sigma(r) dA}{|\vec{R} - \vec{r}|} \\ \int \frac{\lambda(x) dx}{|\vec{R} - \vec{r}|} \end{array} \right. \quad (\text{II.2-90})$$

Compárese estas integrales con las II.2-5 y nótese que por ser escalares hay una mayor facilidad de integración.

En cuanto a la energía potencial para una distribución continua de carga, por simple extensión de la ec. II.2-88 es fácil demostrar que ésta se puede escribir cómo⁵:

⁵ Para evitar confusiones entre los símbolos de potencial y volumen de ahora en adelante el volumen se representará con la letra griega “tau” (τ).

$$U_e = \begin{cases} \iiint \frac{\rho(r) \varphi d \tau}{2} \\ \iint \frac{\sigma(r) \varphi d A}{2} \\ \int \frac{\lambda(x) \varphi d x}{2} \end{cases} \quad (\text{II.2-91})$$

Las integrales triple y doble de las ecs. II.2-90,91 se pueden, mediante la técnica de transformación de variables y/o sistemas de ejes coordenados apropiados, evaluar como integrales en una sola variable. En lo sucesivo se omitirán los símbolos triple y doble en las integrales en el sentido de que esto es siempre posible.

Cuando se tienen distribuciones de carga cuyas dimensiones son más grandes que la distancia a la cual se quiere determinar el potencial, se puede considerar a la distribución extendida hasta el infinito. En estas condiciones se puede decir que la carga y el punto de potencial nulo están “ambos en el infinito” y en consecuencia la carga nunca se alejaría una gran distancia del punto de potencial nulo. En estas circunstancias el método de la integral de línea (ec. II.2-77b) o el método integral del elemento de carga (ec. II.2-90) para determinar el potencial, no son aplicables. Sin embargo, si conocemos el campo eléctrico como función de la variable que se extiende hasta infinito (u) entonces podemos escribir matemáticamente de la ec. II.2-82 que:

$$\varphi_u = -\int E_u du + C \quad (\text{II.2-92})$$

En donde la constante de integración C no puede ser determinada a menos que se tenga conocimiento de las condiciones en el infinito, es decir, el valor que tomaría la integral de la función E_u cuando la variable u toma el valor infinito.

II.2.9.a Potencial producido por una distribución de carga lineal

Como ejemplo de la determinación del potencial eléctrico producido por una distribución de carga lineal, analizaremos una vez más el hilo de la sección II.1.7c con una densidad de carga λ . El potencial producido por este hilo de longitud L a una distancia R del centro se puede obtener directamente por integración de la tercera de las ecs. II.2-89 siguiendo la metodología similar a la presentada en esa sección. Este método de cálculo se deja al estudiante como ejercicio. Mediante la ec. II.2-77b podemos aplicar el método de la integral de línea de cálculo del potencial, suponiendo que conocemos el campo eléctrico y el cual viene dado por la ec. II.1-23. Para ejecutar la integral de línea debemos hacer el campo una función de la coordenada de integración r a lo largo de una dirección radial desde infinito hasta una distancia final R . Para ello hacemos en las ecs. II.1-23 y II.2-77b las transformaciones: $R \equiv r$, $\hat{j} \equiv \hat{r}$ y $d\vec{l} \equiv d\vec{r}$, de forma que la ecuación II.1-23 se reduce a:

$$\vec{E}_r = 2 \frac{K_0 \lambda}{r} \frac{\hat{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{L/2}\right)^2}} \quad (\text{II.2-93})$$

Reemplazando II.2-93 en la ec. II.2-77b se obtiene que⁶:

$$\varphi_{hilo} = - \int_{\infty}^R \frac{K_0 \lambda}{r} \frac{dr}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{L/2}\right)^2}} = \quad (\text{II.2-94})$$

Si en esta ecuación se hace tender $L \rightarrow \infty$ entonces se tendría la solución para un hilo infinito, la cual es:

$$\varphi_{hilo} = -2 K_0 \lambda \ln R + C \quad (\text{II.2-95})$$

El mismo resultado también pudo haberse obtenido por integración de la ec. II.2-59 mediante la ec. II.2-92 y en donde como se señaló anteriormente, la constante C no puede ser determinada a menos que se conozcan las condiciones en los extremos del hilo. Por lo general se considera que esta constante es nula cuando el argumento de la función logarítmica es 1, digamos para $r=r_0$, con lo cual se puede escribir la solución también como:

$$\varphi_{hilo} = -2 K_0 \lambda \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{II.2-96})$$

En la figura II.2-18 se representa la gráfica del potencial del hilo como función de la distancia radial, ¿ cómo puede usted justificar que el potencial es negativo para $r > r_0$ si la densidad de carga es positiva?.

⁶ Para más detalles como resolver esta integral véase:

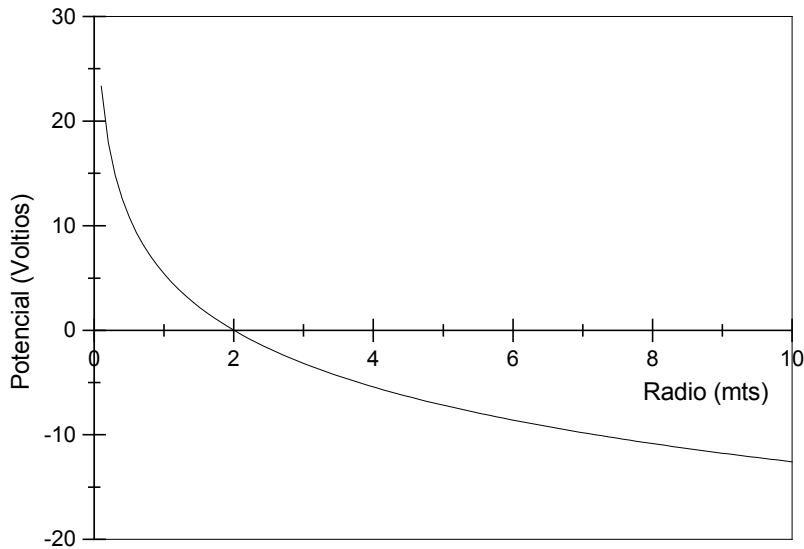


Fig. II.2-18. Variación del potencial de un hilo infinito

II.2.9.b Potencial producido por una distribución de carga superficial

Para ejemplificar la determinación del potencial de una distribución de carga en dos dimensiones consideraremos de nuevo el disco no-conductor uniformemente cargado de la sección II.2.3b de radio a y espesor despreciable, el cual posee una carga total Q distribuida con una densidad de carga por unidad de área σ determinada por la ec. II.2-17. Suponiendo que conocemos el campo eléctrico y el cual viene dado por la ec. II.2-24 y siguiendo la metodología similar a la presentada en la sección anterior, podemos aplicar el método de la integral de línea para calcular el potencial producido por este disco mediante la ec. II.2-77b. Este método de cálculo se deja al estudiante como ejercicio. En esta sección ilustraremos el método integral de la carga puntual y siguiendo un método similar al de la secciones II.2.3.a y II.2.3.b. El potencial se evaluará a una distancia R a lo largo de eje del disco localizado en el plano XY como se mostró en la figura II.2-4. Por razones de simetría es más conveniente tomar el origen de coordenadas en el centro del cuerpo de forma tal que podemos considerar al disco como conformado por elementos diferenciales de anillos. Cada elemento de anillo de radio r , espesor dr está situado a una distancia del centro:

$$s = |\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{r^2 + R^2} \quad (\text{II.2-97})$$

Este elemento de anillo posee también un elemento de carga dado por:

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

Este elemento de carga considerado como una carga puntual de acuerdo con la ec. II.2-89 produciría un elemento de potencial dado por:

$$d\varphi = K_0 \frac{dq}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad (\text{II.2-98})$$

El potencial en el punto R vendrá dado por la integral como se presenta en la ec. II.2-90 entre los límites $0 \rightarrow a$, se tiene que:

$$\varphi_R = K_0 \sigma \int_0^a \frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + R^2}} \quad (\text{II.2-99})$$

Para evaluar esta integral se considera a r y s como variables, entonces se puede diferenciar la ec (II.2-97) para obtener:

$$ds = d\left(\sqrt{r^2 + R^2}\right) = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + R^2}} \quad (\text{II.2-100})$$

En la transformación de la integración desde la variable r hacia la variable s los nuevos límites de integración de acuerdo con la ec. II.2-97 serían; desde $r: 0 \rightarrow a$ hasta $s: L \rightarrow (a^2 + R^2)^{1/2}$. Así que mediante la ec. II.2-100 la ec. II.2-99 se reduce a:

$$\varphi_R = 2\pi\sigma K_0 \int_L^{\sqrt{a^2 + R^2}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + R^2}} = 2\pi\sigma K_0 \left[\sqrt{a^2 + R^2} - a \right] \quad (\text{II.2-101})$$

Para grandes distancias sobre el eje Z tal que $R \gg a$ se tiene que por la expansión de Taylor:

$$\sqrt{a^2 + R^2} - a \cong \frac{a^2}{2R} \quad (\text{II.2-102})$$

En consecuencia el potencial del disco dado por la ec. II.2-101 se reduce a:

$$\varphi_R = \frac{\pi a^2 \sigma K_0}{R} = \frac{K_0 Q}{R} \quad (\text{II.2-103})$$

Constatándose así que el potencial de un disco a grandes distancias se comporta como una carga puntual.

Si se quiere obtener el campo eléctrico a partir del potencial se ejecutan las transformaciones $R \rightarrow z$ y se procede a diferenciar la ec. II.2-103 de acuerdo a la ec. II.2-82 para obtener la ec. II.2-23.

La determinación del potencial fuera del eje requiere la resolución de integrales elípticas las cuales son más complejas fuera del alcance de esta obra.

II.2.9.c Potencial producido por una distribución de carga volumétrica

La determinación del potencial producido por una carga distribuida en tres dimensiones es un problema más fácil de resolver que la determinación del campo eléctrico. Uno de los métodos tradicionales de atacar este problema es mediante la solución de la ecuación de Laplace; sin embargo, esta metodología requiere conocimientos matemáticos más elaborados los cuales son usualmente desarrollados en textos más avanzados de la electricidad y no serán ulteriormente discutidos en esta obra. El ejemplo más sencillo de distribución volumétrica consiste en una distribución esférica, tal como se presentó en la sección II.2.3c y acorde con la figura II.2-5. El potencial tanto dentro de la esfera como fuera de ella puede ser determinado por integración mediante la primera de las ecs. II.2-90 por dos métodos de cálculo diferentes. Según el primer método, similar a como se explicó en la sección II.2.3c se puede considerar un elemento de carga dentro de un elemento de volumen en coordenadas esféricas $dV=r^2 dr \cdot d\theta \cdot d\phi$ situado a una distancia r del centro de la esfera el cual posee un diferencial de carga $dq=\rho(r) \cdot dV$. Según el segundo, el cual permite utilizar resultados obtenidos en las secciones anteriores, se puede dividir la esfera en conchas esféricas de radio r y espesor diferencial dr las cuales poseen una densidad de carga $\sigma=\rho \cdot dr$. Luego se puede considerar cada concha esférica constituida o formada de anillos de sección transversal $dS=r \cdot dr \cdot d\theta$, radio $r \cdot \text{Sen} \theta$ y densidad de carga $\lambda = \sigma \cdot r \cdot d\theta = \rho(r) \cdot dr \cdot d\theta$, como se muestra en la figura II.2-19. Mediante cualquiera de los dos métodos es posible demostrar que el potencial eléctrico vendría dado por (la evaluación de ésta integral se deja al lector como ejercicio, ver problemas);

Para $r=R_0 < R$:

En el interior de la esfera, la integración se reduce a dos partes, una primera parte consistente de la carga encerrada hasta el radio R_0 y otra desde este radio hasta el radio de la esfera, para obtener:

$$\varphi_{R_0} = K_0 \frac{Q}{R_0} + K_0 \int_{R_0}^R \rho(r) r dr \quad (\text{II.2-104})$$

Para $r=R_1 > R$:

En el exterior de la esfera, la integración se ejecuta desde el radio cero hasta el radio final R_1 para obtener:

$$\varphi_{R_1} = K_0 \frac{Q}{R_1} \quad (\text{II.2-105})$$

Se puede apreciar una vez más que de forma similar como para el campo eléctrico, el potencial de la parte que encierra carga corresponde al de una carga puntual como si toda la carga estuviese concentrada en el centro.

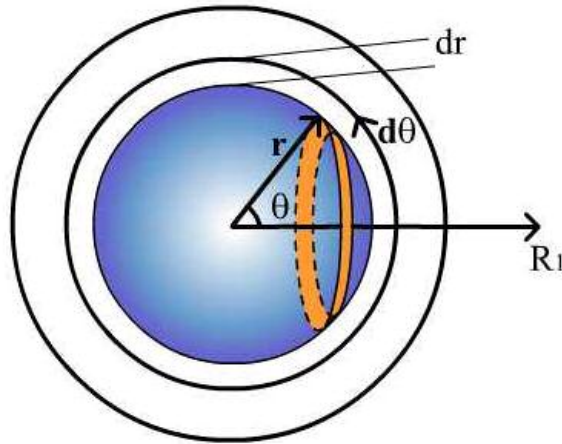


Fig. II.2-19. Cálculo del potencial de una distribución esférica de carga.

II.2.10 Superficies y volúmenes equipotenciales: Propiedades y usos

Desde un punto de vista matemático de acuerdo con la ec. II.2-83 el potencial eléctrico también se conoce como función potencial. Cuando el conjunto o lugar geométrico de puntos de esta función en el espacio cumple la condición:

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \text{Constante} \quad (\text{II.2-106})$$

Se dice entonces que la función potencial determina una superficie en el espacio en la cual el potencial eléctrico es constante y se denomina *superficie equipotencial* (del latín *aequi*=igual). Una superficie cerrada y la cual encierra un volumen en el cual el potencial es constante en todo su espacio constituye lo que se denomina *volumen equipotencial*.

De acuerdo con la ec. II.2-83 el vector gradiente proporciona la dirección de variación máxima de la función potencial; en consecuencia, cuando se cumple la condición II.2-106 el vector gradiente paralelo al campo eléctrico, es normal a la superficie equipotencial.

Prueba de que $\vec{\nabla}\varphi \perp \varphi=\text{cte}$

Supongamos que la superficie cóncava de la figura II.2-20 consiste en una superficie equipotencial. Tomemos dos segmentos, el primero OM, representa un vector de variación diferencial en esa superficie, y el otro OP no está en esa superficie sino que representa la dirección de variación máxima, es decir, paralelo a $\vec{\nabla}\varphi$. Los segmentos OM y OP se pueden escribir en forma vectorial respectivamente como:

$$\vec{OM} = d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (\text{II.2-107a})$$

$$\vec{OP} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} = \vec{\nabla}\varphi \quad (\text{II.2-107b})$$

Por definición de diferencial se tiene que:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \quad (\text{II.2-108})$$

Mediante las ecs. II.2-107 la ec. II.2-108 se puede escribir como:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}\right) \cdot (dx\hat{i}) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}\right) \cdot (dx\hat{j}) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (dx\hat{k}) = \nabla\varphi \cdot \overline{OM} \quad (\text{II.2-109})$$

Dado que la superficie es equipotencial, entonces si $\varphi = \text{cte} \Rightarrow d\varphi = 0$, puesto que $OM \parallel \varphi = \text{cte}$; entonces, la ec. II.2-109 implica que $\nabla\varphi \perp OM \Rightarrow$ el campo eléctrico es perpendicular a la superficie equipotencial.

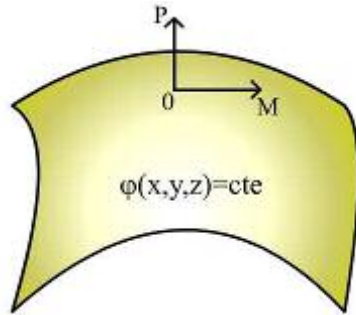


Fig. II.2-20 Perpendicularidad entre la superficie equipotencial y la línea de fuerza del campo eléctrico.

Las propiedades más importantes de las superficies y volúmenes equipotenciales son las siguientes:

- ❑ No se requiere trabajo para mover una carga en una superficie equipotencial. Esto se deriva o se concluye directamente de la ecuación II.2-74.

- ❑ Dado que al campo eléctrico le asociamos una línea de fuerza tangente a la dirección del campo; entonces, las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales forman un sistema o red de curvas mutuamente perpendiculares. Esto se deriva directamente de la demostración anterior. Es obvio entonces que la ecuación II.2-82 sirve también para obtener las curvas de las líneas de fuerza.

- ❑ Al igual que para las líneas de fuerza, a las superficies equipotenciales se les asigna un único y sólo conjunto de puntos en el espacio, es decir, las superficies equipotenciales no se cruzan entre ellas, excepto en un punto del espacio en donde el campo es nulo y solo en ese punto las superficies se intersectan.

- ❑ Las superficies equipotenciales se grafican siguiendo la ecuación II.2-106 derivada de acuerdo con la configuración de las cargas y aquellas pueden llenar todo el espacio alrededor de éstas. Sin embargo, el espaciamiento entre superficies equipotenciales consecutivas se acostumbra determinar por el gradiente normal a la superficie equipotencial, así este espaciamiento, indicativo de la magnitud del campo eléctrico, vendría dado por la ecuación II.2-82.

▣ Una de las aplicaciones más interesantes de las superficies y volúmenes equipotenciales y en donde éstas adquieren su verdadero nombre, se encuentra en los conductores, como se presenta en la sección II.2-12.

II.2.11 El dipolo eléctrico

En una diversidad de sistemas de cargas se encuentra la situación de dos o más cargas de igual magnitud pero de signo opuesto separadas por una distancia corta. Este arreglo particular de cargas se encuentra mayoritariamente en el ámbito microscópico de la materia. De acuerdo a la visión atómico-molecular de la materia, ya vista en el capítulo 1.3, el modelo más sencillo del átomo más simple, la carga positiva residente en el núcleo y la negativa del electrón, se encuentran separadas instantáneamente por una pequeña distancia. Aunque por el revoloteo del electrón alrededor del átomo en promedio los centros de carga coinciden resultando en una separación nula, por influencias internas propias de la materia o por efectos externos la carga negativa se separa ligeramente del núcleo creándose así una configuración de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia muy pequeña en comparación con las distancias interatómicas. Este arreglo se presenta en muchos enlaces atómico-moleculares de la materia y se conoce como “dipolo eléctrico”. El conocimiento de los parámetros eléctricos tales como campo, potencial y energía potencial de esta configuración es de esencial importancia para comprender fenómenos eléctricos en la interacción entre átomos y moléculas⁷. En consecuencia, a continuación en esta sección se deducirán estos parámetros para el dipolo eléctrico.

II.2.12 Campo eléctrico, potencial y distribución de la carga en conductores

De los experimentos iniciales de Stephen Gray en 1730 quedó plenamente establecido que a los cuerpos se les podía asignar cierta virtud eléctrica, es decir, los cuerpos podían ser electrificables en cierta magnitud mediante fricción y acción mecánica. Este estado de electrificación podía ser no sólo mantenido por tiempo prolongado sino que también podía ser transferido a otros cuerpos, bien por contacto o bien por inducción electrostática. En consecuencia los cuerpos podían ser clasificados en eléctricos y no-eléctricos. Hoy día los cuerpos que pueden ser electrificados se clasifican en conductores y aisladores. En esta sección ampliaremos y justificaremos con el concepto de campo eléctrico y mediante la ley de Gauss las características y propiedades de estos dos tipos de materiales, algunas de ellas ya vistas en el capítulo II.1.

El rasgo característico que distingue los conductores de los aislantes es su capacidad o habilidad de permitir la localización, desplazamiento y/o movilidad de las cargas. Se sabe con certeza experimentalmente que las propiedades más resaltantes que los diferencian son:

Conductores

▣ Alta movilidad o conducción de las cargas. Las cargas que se desplazan en un conductor sólido como los metales son los electrones. En el capítulo II.4 será plenamente clarificado el porqué de este fenómeno cuando se analice las causas de la conducción y movilidad de las cargas.

⁷ Este tópico será ampliado en el capítulo II.3

- ⊞ Alta conducción del calor⁸
- ⊞ Distribución de la carga estática en las superficies sólidas con una densidad superficial por lo general no-uniforme.

Ejemplo: Metales, soluciones electrolíticas, agua impura, etc.

Aislantes

- ✱ Cargas inmóviles
- ✱ Poca conducción del calor
- ✱ Distribución de la carga uniforme en todo su volumen.

Ejemplos: Vidrio, cuarzo, ámbar, azufre, bakelita, una gran diversidad de plásticos, agua pura, etc.

En la sección II.1.4 se presentó la inducción electrostática, analizaremos ahora como ocurre este fenómeno empleando el concepto del campo eléctrico. Supongamos que se tienen dos placas paralelas cuya separación es menor que las dimensiones de las placas a fin de producir un campo eléctrico uniforme como se indica en la figura II.2-21, y colocamos un cuerpo aislante y otro conductor entre las placas de forma similar al de la figura II.1-3a. En el interior de cada cuerpo se establecerá un campo eléctrico determinado por la constante del medio y el cual actuará sobre la carga negativa del electrón y la positiva del núcleo⁹. El electrón revoletea alrededor del núcleo entonces en promedio al nivel atómico la carga es neutra y a escala microscópica el aislante es neutro. El campo intentará separar al electrón y al núcleo, pero de acuerdo con las propiedades mencionadas anteriormente en el aislante el campo eléctrico no puede separar ni mover las cargas a gran escala. A lo sumo el campo producirá un dipolo de dimensiones atómicas, de forma que si tomamos una superficie gaussiana como S en la figura II.2-21 carga neta es nula y sólo quedaría el campo eléctrico de las cargas extremas. Así que con toda certeza se puede aseverar que no hay creación ni separación de cargas y en el interior de un aislante perfecto el campo eléctrico inducido sería mínimo.

En el caso del conductor, el campo eléctrico actuará sobre los electrones acelerándolos hacia la izquierda, dado que existe una alta movilidad de los electrones un gran número de éstos se desplazarán, acumulándose en la superficie del extremo izquierdo y quedando a la derecha un defecto de carga negativa que se interpreta como una carga positiva. Debe quedar en claro que en un sólido las cargas positivas residentes en los núcleos denominados iones, no se mueven por la acción de un campo de magnitud ordinaria. A medida que ocurre este acumulamiento de carga negativa y positiva en extremos opuestos se va creando un campo eléctrico denominado campo inducido el cual comienza a actuar sobre los subsiguientes electrones para desacelerarlos o mejor dicho para contrarrestar el campo eléctrico externo como se indica en la figura II.2-21. Una explicación en términos de potencial es factible si se toma en cuenta que la acumulación de carga en los extremos opuestos crea una diferencia de potencial que contrarresta la producida por el campo inicial. Entonces podría hablarse también en términos de una diferencia de potencial inducida.

El movimiento de los electrones ocurre en un corto tiempo, rápidamente se alcanza un estado de equilibrio de carga estacionaria o estado electrostático el cual prevalece después que cesa todo movimiento de los electrones. Se dice entonces que el conductor está polarizado y que ha ocurrido una inducción electrostática. Cuando ha cesado todo movimiento de los electrones y se alcanza un estado electrostático, entonces se puede

⁸ Para mayores detalles acerca de la conducción del calor véase capítulo I.9.3 de este curso.

⁹ En el capítulo II.4 se estudiará en detalle los campos eléctricos en la materia.

afirmar que el campo eléctrico inducido es de la misma magnitud pero de sentido contrario al externo de forma tal que el campo eléctrico resultante dentro del conductor es nulo. Similarmente se dice que la diferencia de potencial inducida es igual a la externa, entonces la diferencia de potencial total es nula y el potencial es constante en todo el volumen del conductor. Por lo tanto, se dice que el conductor conforma un *volumen equipotencial*. Si aplicamos la ley de Gauss a una superficie gaussiana como S' la cual para que rigurosamente esté en la superficie se encuentra a dimensiones atómicas de ésta, concluimos que como el campo eléctrico es nulo entonces el flujo a través de esta superficie es también nulo y como la superficie es arbitraria entonces la carga neta encerrada en el interior es nula. Una situación similar ocurre en el conductor cuando se carga por contacto, en este caso las cargas en exceso se redistribuyen sólo en la superficie para alcanzar de nuevo un estado electrostático. En consecuencia se puede aseverar que: *La carga en condiciones electrostáticas en el interior de un conductor con una superficie cerrada siempre es nula y entonces necesariamente debe residir en su superficie.*

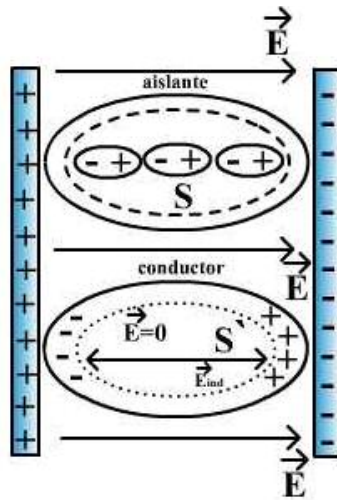


Fig. II.2-21. Campos eléctricos en un aislante y en un conductor

Cualquiera que sea la forma geométrica del conductor, la complejidad del campo externo o el método para cargarlo, el campo eléctrico será cero y el potencial es constante en todas partes en su interior una vez que las cargas alcanzan un equilibrio y quedan en reposo. El tiempo para alcanzar este equilibrio es del orden de 10^{-19} seg en tanto que el tiempo que le toma a los electrones en movimiento para colisionar es del orden de 10^{-14} seg¹⁰.

De acuerdo con la teoría de campos rigurosa, el campo eléctrico dentro de un conductor penetra varias capas atómicas dentro del conductor hasta distancias del orden de varios Angstroms, ésta profundidad de penetración se denomina *profundidad de piel*, pero para fines prácticos a escala macroscópica se puede aseverar que la carga en un conductor está sólo en la superficie.

Es obvio de la ley de Gauss que el campo eléctrico externo a un conductor no es nulo. Dado que la carga se localiza sólo en la superficie entonces todo campo eléctrico

¹⁰ En el capítulo siguiente se evaluarán estos tiempos.

producido externamente vendrá determinado exclusivamente por la densidad de carga σ en la superficie del conductor. Sin embargo, antes de aplicar la ley de Gauss debe conocerse la simetría del campo eléctrico de un conductor. Supongamos por ahora que este campo tiene una componente tanto tangencial como normal a la superficie externa inmediata como se ilustra en la figura II.2-22a para un conductor de forma arbitraria. Como se indica con las flechas existirían en esas direcciones líneas de fuerza, entonces una carga en la superficie como un electrón se movería en la superficie y de no alcanzarse un estado estacionario el electrón estaría permanentemente acelerado girando en la superficie cerrada del conductor. Empleando el concepto de potencial se puede decir que si hubiese movimiento de las cargas en la superficie, entonces el conductor no sería un volumen equipotencial y existiría una diferencia de potencial a lo largo de la superficie. La circulación del campo eléctrico no sería nula y el electrón podría moverse eternamente acelerado, o bien podría moverse a velocidad constante en la superficie. El movimiento eterno sin disminución aparente se denomina superconductividad y es un fenómeno que sólo aparece en ciertos materiales bajo condiciones especiales. Dado que esto no ha sido observado en condiciones normales se concluye que la componente tangencial es nula.

Es sabido por la Física de radiaciones que una carga acelerada produce energía radiante similar a la radiada por un cuerpo muy caliente. Dado que experimentalmente no se ha detectado radiación emitida por un conductor cargado en condiciones electrostáticas, entonces se deduce que cuando la carga en el conductor alcanza un equilibrio electrostático la componente tangencial se anula quedando entonces sólo la componente normal. Este proceso ocurre en el mismo tiempo en el cual se anula el campo en el interior. En consecuencia se confirma un hecho fácilmente corroborable experimentalmente:

El campo eléctrico inmediatamente externo a un conductor posee una simetría normal a la superficie del conductor en la cual el potencial es constante.

Esto se ilustra directamente en el Exp. II.2-1 en el cual se muestra una esfera metálica con pequeñas y ligeras tiras metálicas pegadas a la superficie por un extremo y la cual funciona como un electroscopio. Cuando la esfera es cargada las tiras adquieren una simetría la cual, excepto por un ligero efecto curvo debido a la gravedad, es radial; indicando que la dirección del campo es normal a la superficie. Un fenómeno similar le ocurriría al cabello de una persona cargada y aislada. El experimento es perfectamente verificable con conductores de cualquier geometría pero es más difícil de apreciar. Sin embargo, es preciso aclarar que en un conductor de forma geométrica arbitraria otra que la esférica, el campo eléctrico a medida que nos alejamos del conductor deja de ser normal a la superficie (véase líneas de fuerza de conductores).

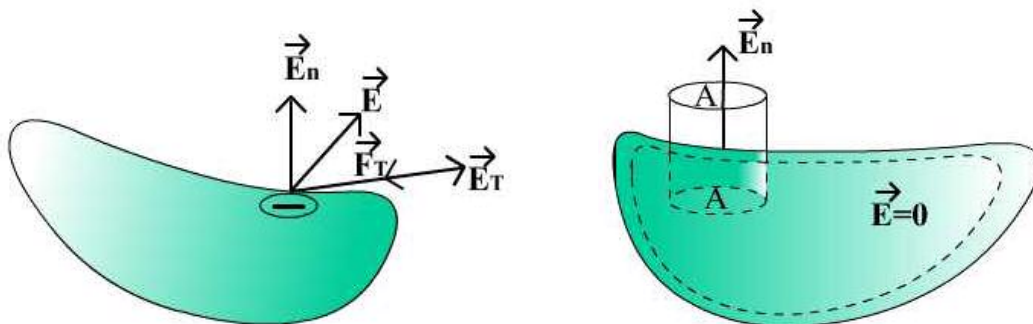


Fig. II.2-22. Conductor de forma arbitraria. a) Simetría del campo, b) superficie gaussiana

Una vez conocida la simetría del campo se puede ahora aplicar la ley de Gauss, para ello tomamos como superficie gaussiana un pequeño cilindro que atraviesa la superficie del conductor como se presenta en la figura II.2-22b. Entonces por aplicación de la ley de Gauss de acuerdo a la segunda de las ecs. II.2-43 se tiene que el flujo en el interior del conductor es nulo y el flujo total será:

Lado izquierdo:

$$\Phi = \Phi_{\text{periferia}} + \Phi_{\text{tapa externa}} = \oint E_n dA + \oint E_T dA = E_n A \quad (\text{II.2-110})$$

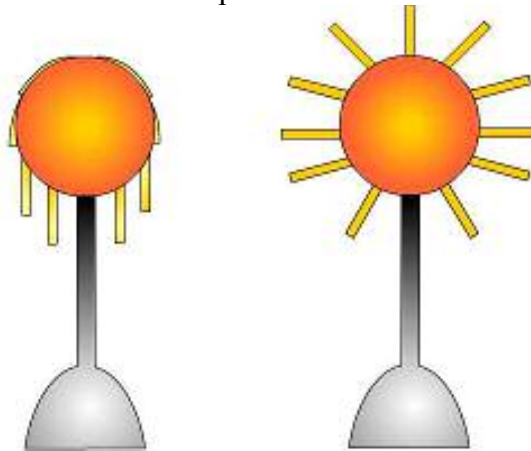
Lado derecho: Suponemos que la densidad de carga se rige por la ec. I.1-11b tal que es la densidad de carga existente en el punto adyacente al campo y determinado por el área A, entonces se tiene que;

$$4\pi D_e q_{\text{neta}} = 4\pi D_e \oint \sigma dA = 4\pi D_e \sigma A \quad (\text{II.2-111})$$

Igualando se obtiene:

$$E_n = 4\pi D_e \sigma \quad (\text{II.2-112})$$

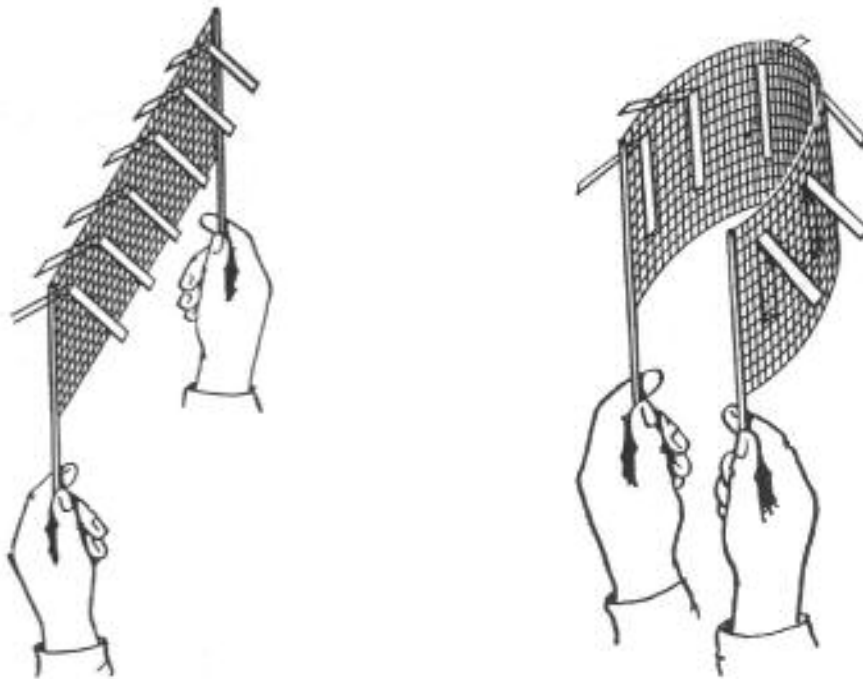
Confirmándose así que, el campo producido por un conductor de forma arbitraria en el espacio cercano que le rodea sólo depende de la densidad de carga en su superficie.



Exp. E.II.2-1. Simetría del campo en una esfera conductora.

Anteriormente se señaló que el conductor debe poseer una superficie cerrada, para entender el porqué de la necesidad de este hecho, consideremos una malla metálica la cual como en el experimento anterior está provista de pequeñas y ligeras tiras metálicas de ambos lados y dos varas aislantes de soporte o sostén, constituyendo así lo que se podría denominar “*Electroscopio de malla*”, tal cual se ilustra en el experimento E.II.2-2. En la primera fase (a) de dicho experimento se tiene que la malla extendida está descargada y las tiras están colapsadas por su propio peso, una vez cargada la malla las tiras adquieren la misma carga son repelidas y se separan de la malla hasta una cierta inclinación acorde con la carga adquirida, indicando la existencia de un campo eléctrico en ambos lados de la malla. Si ahora se tuerce la malla hasta adquirir casi una superficie cerrada observamos que

las tiras internas colapsan indicando la existencia de un campo nulo en el interior conformado por la superficie cerrada.



Exp. E.II.2-2. Electroscopio de malla.

La propiedad de los conductores en poseer campo nulo y potencial constante en su interior es un fenómeno físico de trascendental importancia para el entendimiento de otros fenómenos eléctricos y sus correspondientes aplicaciones, así que, se le dedicará un análisis más exhaustivo en esta obra. Esta propiedad ha sido plasmada en dos teoremas que tienen como consecuencia la validez de la ley de Coulomb.

Teorema de Laplace

Si la ley de fuerzas corresponde a la ley proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, entonces, no hay carga, ni fuerza, ni campo eléctrico y el potencial es constante, en el interior de un conductor.

Este teorema fue demostrado por Laplace mediante la ecuación que lleva su nombre (II.2-86b). La prueba de este teorema sigue también directamente de la ley de Gauss tal cual se hizo anteriormente y la cual es una reformulación de la ley de Coulomb. Una demostración parcial empleando sólo la ley de Coulomb fue dada por Pointing en 1920 (véase problemas del capítulo II.1).

Teorema de Cavendish

Es el inverso del teorema anterior;

Si la carga, la fuerza y el campo son nulos, y el potencial constante en el interior de un conductor; entonces, la ley de fuerzas debe ser la ley del inverso del cuadrado de la distancia.

Cavendish y luego Maxwell dieron una prueba experimental de este teorema empleando un montaje experimental similar al de la hielera de Faraday y el cual se ilustra en el experimento E.II.2-3. El montaje consiste en dos esferas metálicas concéntricas separadas

mediante aislantes y colocadas sobre un electroscopio. La esfera externa se puede poner en contacto eléctrico con la interna a través de un pequeño orificio en el tope. El experimento se lleva a cabo cargando primero la esfera externa, la carga correspondiente es indicada por las hojas del electroscopio, luego las esferas se ponen en contacto eléctrico mediante un hilo metálico y se hacen las siguientes observaciones experimentales:

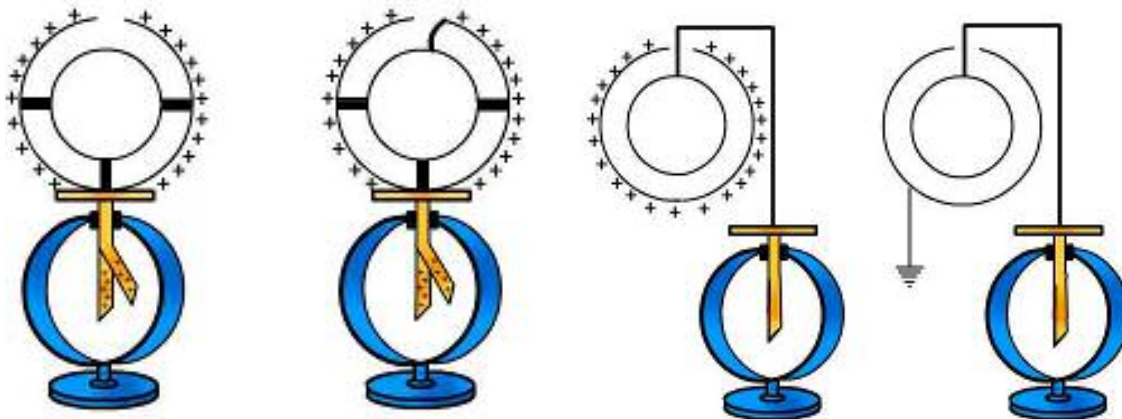
- El electroscopio no detecta cambio en la carga de la esfera externa.
- Si se conecta sólo a la esfera interna con el electroscopio no se detecta presencia de carga en esta esfera.
- Si se descarga a la esfera externa y se conecta a la interna con el electroscopio, tampoco se detecta carga en esta última.

La interpretación que se deriva de estas observaciones es que:

“No existe fuerza eléctrica de Coulomb sobre las cargas en el hilo y en consecuencia no fluye electricidad entre las dos esferas”.

En una demostración experimental dramática Faraday ejecutó este experimento colocándose en el interior de un conductor elevado a 100 kV con un electrómetro bastante sensible y no sólo sobrevivió sino que también no detectó nada de carga. Este experimento fue luego repetido por Plimpton y Lawton en 1936 con un electroscopio provisto de amplificación y tampoco detectó carga correspondiente a una diferencia de potencial de $1 \mu\text{V}$.

La prueba matemática del teorema para esta geometría simple consistente de conductores esféricos fue realizada por Cavendish y Maxwell, y concluyen que la única ley compatible con el hecho de que no hay carga en el interior de un conductor es la ley del inverso del cuadrado de la distancia dentro de la precisión indicada en el capítulo II.1, sección II.1.7.



Exp. E.II.2-3. Experimento de Cavendish y Maxwell

II.2.12.a Densidad de carga en conductores puntiagudos o protuberancias

Analizaremos ahora la situación general de la distribución de la carga en un conductor de forma arbitraria y de acuerdo a una metodología simple. De la ec. II.2-112 se puede directamente inferir que la carga en un conductor esférico se distribuye de forma uniforme, es decir, la densidad de carga superficial en el conductor es constante en toda la superficie

esférica. Sin embargo, para un conductor de forma arbitraria σ no necesariamente es constante.

Un conductor que posee un sector de la superficie puntiagudo o con una protuberancia tiene desde un punto de vista geométrico un radio de curvatura pequeño en ese sector; y lo contrario se dice si la superficie es plana. Excepto en algunos casos de geometría simple y alta simetría, el problema de determinar cuantitativamente la distribución de la carga σ , la magnitud del potencial y de allí el campo eléctrico en un conductor de esta naturaleza, es complicado; pero es posible resolverlo mediante la ecuación de Laplace. Cuando se presentan cargas de signo opuesto en sectores diferentes del conductor, como es el caso de la inducción electrostática, la situación es aún más compleja. En consecuencia, se puede aseverar que la determinación de la carga en un conductor de forma arbitraria es no-uniforme y con una variación bastante compleja en la superficie de un conductor, como es el caso de la inducción. Encontrar la densidad de carga es posible de forma fácil solamente en conductores con formas geométricas simples y de gran simetría.

Mediante simples consideraciones geométricas, del campo y el potencial eléctrico analizaremos de forma no rigurosa, como es la distribución de la densidad de carga superficial en un conductor puntiagudo. Para ello utilizaremos un cuerpo cuya forma geométrica consiste de una esfera con una protuberancia como se muestra en la figura II.2-23. El sector de la esfera alejado de la protuberancia posee un radio de curvatura constante e igual al radio R de la esfera. Por consideraciones geométricas simples se puede considerar el sector de la protuberancia como circunscrito por una pequeña esfera de radio r (línea punteada). Obviamente esta pequeña esfera posee un radio menor por lo cual se puede asegurar que la protuberancia posee un radio de curvatura más pequeño. De las ecuaciones II.2-25 y II.2-105 sabemos que en la superficie de las dos esferas la magnitud del campo y del potencial eléctrico son respectivamente:

$$E_R = K_0 \frac{Q_R}{R^2} \quad (\text{II.2-113a}) \quad E_r = K_0 \frac{Q_r}{r^2} \quad (\text{II.2-113b})$$

$$\varphi_R = K_0 \frac{Q_R}{R} \quad (\text{II.2-114a}) \quad \varphi_r = K_0 \frac{Q_r}{r} \quad (\text{II.2-114b})$$

Dado que el potencial es constante en toda la superficie del conductor entonces éste es el mismo para las esferas, así que igualando las ecs. II.2-114 se obtiene que:

$$\sigma_r = \sigma_R \left(\frac{R}{r} \right) \quad (\text{II.2-115})$$

En tanto que de la relación de las ecs. II.2-113 se tiene que;

$$\frac{E_r}{E_R} = \frac{\sigma_r}{\sigma_R} = \left(\frac{R}{r} \right) \quad (\text{II.2-116})$$

Se deriva de estas ecuaciones que la densidad de carga y el campo eléctrico son inversamente proporcionales al radio de curvatura. En consecuencia, en un sector puntiagudo o protuberancia la densidad de carga y el campo eléctrico serán elevados y no-uniformes en todo el conductor. Esto se puede apreciar gráficamente en la alta densidad de líneas y en la elevada variación del espaciamiento de las superficies equipotenciales alrededor de este tipo de sector (véase ec. II.2-83 y figuras II.2-¿?). Lo contrario ocurre si la superficie en vez de ser exageradamente convexa es exageradamente cóncava.

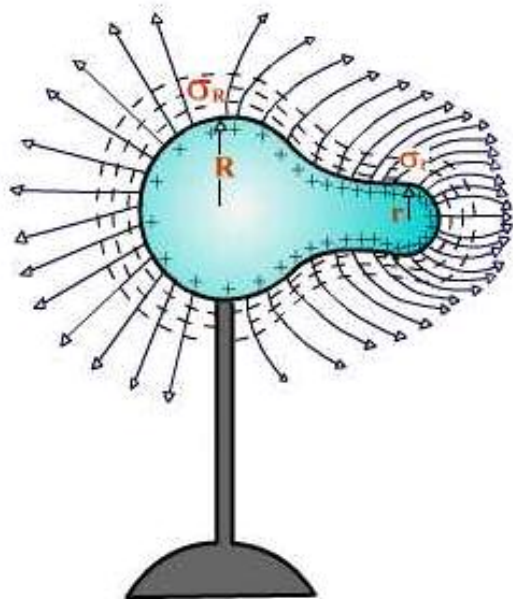


Fig. II.2-23. Conductor esférico con protuberancia

La existencia de campo eléctrico y densidad de carga elevados sobre todo alrededor de sectores puntiagudos de un conductor, produce efectos importantes. El efecto más notorio es la ionización del aire circundante al conductor, esto es la pérdida de electrones de los átomos y/o moléculas que conforman la atmósfera con la consiguiente formación de iones positivos y electrones libres negativos. La captura de electrones para la formación de iones negativos es posible pero de menor ocurrencia. Este fenómeno sucede ya que un campo elevado acelera los pocos electrones libres¹¹ alrededor del conductor, los cuales al colisionar con las moléculas de aire les arrancan más electrones de la capa más externa. Estos nuevos electrones continúan progresivamente el proceso, de forma que el fenómeno se desarrolla en cascada incrementándose rápidamente el número de electrones y iones que luego se desplazan en direcciones contrarias.

La ionización del aire trae como consecuencia los siguientes efectos:

- El aire se hace conductor, este fenómeno se conoce como “*rompimiento eléctrico del aire*” y ocurre a un campo de 3×10^3 kV/m. El cuerpo al recibir la carga contraria bien sea de los iones o los electrones, se anula su carga, por lo que se dice que el “conductor pierde carga”. La ionización es más pronunciada en el aire húmedo que en el seco ya que la molécula de agua es más fácil de polarizar e ionizar. He aquí la razón por la cual los experimentos de electrostática se deben realizar en un ambiente seco y nunca con pronósticos de lluvia, para no “perder” la carga con rapidez.

¹¹ En la atmósfera siempre existe un pequeño número de electrones y iones conocido como ionización residual y la cual proviene de la ionización del aire por la radiación residual o ambiental, la cual a su vez está conformada por los rayos cósmicos y la radioactividad ambiental. Para más detalles véase un texto de Física Moderna o Nuclear.

El efecto de corona, el cual se presenta como una descarga eléctrica, es decir, “un chispazo”, o simplemente se presenta como una iridiscencia o luminosidad alrededor de la protuberancia, la cual por lo general es de color violáceo. Este fenómeno ocurre cuando el campo eléctrico es muy elevado de forma que los electrones acelerados tienen suficiente energía cinética como para elevar la energía de ligadura del electrón en el átomo, proceso que se denomina excitación. Dado que la energía no es suficiente para arrancarlo, éste vuelve a caer a su nivel original emitiendo el exceso de energía en forma de radiación en el rango visible del espectro.

El efecto de descarga de arco, ocurre cuando se acercan dos conductores entre los cuales existe un elevado campo eléctrico y por consiguiente una elevada diferencia de potencial, observándose una chispa que salta entre los dos conductores, preferencialmente por las partes puntiagudas.

La combinación de la ionización con la existencia de campo eléctrico y densidad de carga elevados alrededor de sectores puntiagudos de un conductor tiene aplicaciones importantes, de carácter didáctico u histórico, entre ellas: el *aspersor o molinete eléctrico* y el *pararrayos*.

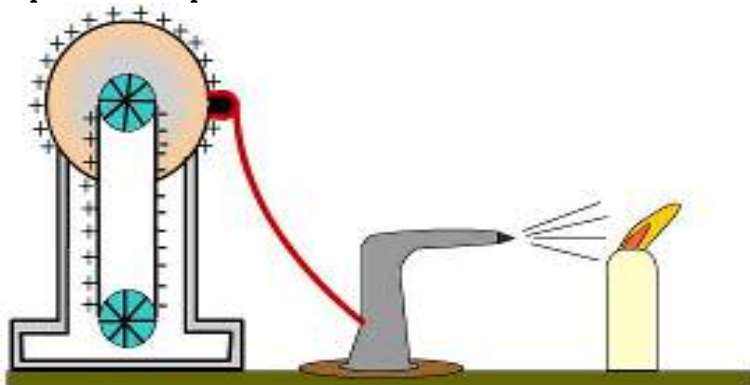
El aspersor, jet o molinete eléctrico

Este artefacto es similar a un aspersor de agua y a la máquina de Hero (véase capítulo I.8 de la parte I de este curso), y como se ilustra en el experimento E.II.2-4 consiste de 4 aspas puntiagudas dobladas en forma de L, montadas sobre un eje perpendicularmente y libres de rotar. Todo el aparato es metálico excepto la base del eje que es un aislante. El aspersor se conecta a un generador de alto potencial eléctrico como el generador de Van de Graaf. Después de un corto tiempo en el cual el aspersor alcanza un elevado potencial, ocurre el rompimiento eléctrico del aire y éste comienza a girar en sentido contrario a la orientación de las puntas. Si se invierte la polaridad, es decir el signo del potencial, el aspersor sigue girando en el mismo sentido de rotación, lo cual indica que la rotación es independiente del signo de la carga en el aspersor. Experimentalmente se dice que ocurre un fenómeno de “jet” o “chorro eléctrico de partículas” que fluye desde la punta. Esta aseveración se corrobora mediante el experimento del “soplete eléctrico”, el cual consiste de una sola aspa puntiaguda próxima a una vela tal cual se muestra en el experimento E.II.2-5. En conjunción con el experimento anterior, la llama es siempre soplada independientemente del signo de la carga en la punta.

Ambos experimentos pueden explicarse mediante el principio de acción y reacción o mejor todavía con el principio de conservación de la cantidad de movimiento, los cuales son idóneos para la explicación de todos los procesos de tipo “jet o chorro”. Sin embargo, se advierte al lector que debe tener claro que, por cuanto en el interior del conductor no existe campo eléctrico, éste se encuentra a un potencial constante y en consecuencia: la causa de la rotación no puede ser atribuida a fuerzas internas o a lo largo del conductor. La explicación del origen de las cargas y su consecuente desplazamiento se deja al lector como tarea.



Exp. E.II.2-4. Aspersor eléctrico



Exp. E.II.2-5. Soplete eléctrico

El Pararrayos

Los fenómenos eléctricos atmosféricos consisten en descargas eléctricas que se desplazan entre las nubes y la superficie de la Tierra. Estos fenómenos aparecen cuando debido a una tormenta la fricción del aire produce una enorme acumulación de carga en las nubes, la densidad de carga y el campo eléctrico son elevados y se crea una gran diferencia de potencial con respecto a la Tierra, del orden de decenas a centenas de kV. Cuando se inicia el rompimiento eléctrico del aire, empieza una avalancha de electrones entre las nubes y la superficie terrestre. Los electrones en gran número pueden desplazarse tanto hacia la Tierra como hacia las nubes. Esta avalancha produce más ionización y luminiscencia como se explicó anteriormente así como enormes compresiones y rarefacciones del aire trayendo como ulterior consecuencia el trueno. Al fenómeno en conjunto se le denomina *Rayo*, pero cuando la descarga ocurre entre nubes cargadas se denomina *Relámpago*. Estos son fenómenos naturales complejos y muy variados que dependen del tipo de moléculas en la atmósfera.

De la misma forma como se “pierde” carga por las partes puntiagudas también se puede “ganar” con gran facilidad. Así que las partes puntiagudas sirven como emisores tanto como receptores de los electrones de los rayos. Por tal motivo, si se coloca un conductor puntiagudo o cualquier pieza metálica que sobresalga por encima de una casa, el conductor servirá como descargador de la nube o en el peor de los casos como receptor de la descarga eléctrica. Si éste conductor es aislado de cualquier parte de la casa y se conecta con la Tierra; entonces, toda la descarga se desplazará a tierra impidiendo el consiguiente daño a la casa y habitantes en ella. Este montaje el cual se denomina *Pararrayos* fue descubierto y aplicado por primera vez por B. Franklin en 1753 mientras volaba una cometa bajo una tormenta¹². En la figura II.2-24 se muestra un montaje de pararrayos doméstico típico. Por las mismas razones, un árbol, un animal o una persona en una superficie plana desprovista de cualquier otra edificación, vegetación, etc., actuaría como un pararrayos durante una tormenta. Muchos casos de incendio, de muerte de animales y personas han ocurrido por esta causa. Las descargas eléctricas también pueden aterrizar en las líneas de alta tensión (voltaje) de la red de electricidad en donde ocasionan apagones y serios daños a los dispositivos. Por ello estas líneas están provistas de pararrayos, los cuales consisten de barras conductoras denominadas “tabaquitos” que por efecto del calentamiento eléctrico se desconectan evitando que el alto voltaje alcance los equipos.

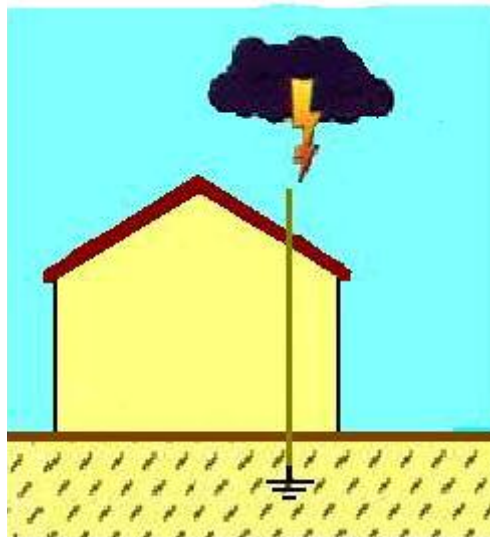


Fig. II.2-24. Pararrayos doméstico

La Jaula de Faraday

La propiedad que tienen las líneas de fuerza en apilarse en los puntos puntiagudos o en superficies convexas conduce a una aplicación esencial para la protección de los equipos sensibles a los campos eléctricos. Si tal como se muestra en el experimento II.2-6 se encierra un instrumento sensible con una jaula construida con una malla de alambres, éste no es afectado por el campo eléctrico externo. Esto ocurre porque como se muestra en la figura II.2-25, las líneas de fuerza se amontonarán en la superficie convexa de los alambres y de esta manera pocas líneas de fuerza atravesarán la malla para alcanzar al equipo en el interior. Así, el campo eléctrico externo influye levemente o nada al instrumento. Esta

¹² Debido a lo peligroso del mismo no se sugiere intentar repetir este simple experimento.

aplicación se conoce como *Jaula de Faraday*, pero como sistema de protección de instrumentos no es tan eficaz como el *apantallamiento* suministrado por conductores con cavidades el cual se presenta a continuación.

Exp. E.II.2-6. Jaula de Faraday

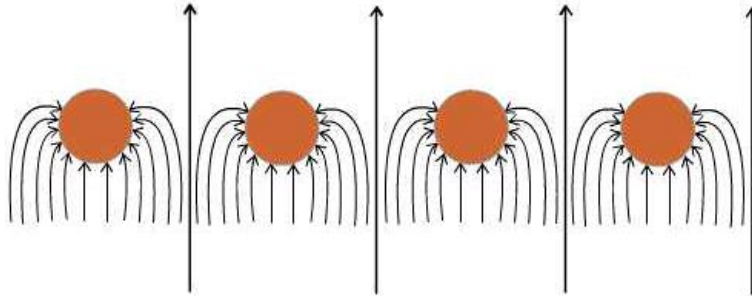


Fig. II.2-25. Líneas de fuerza en la malla de la Jaula de Faraday.

II.2.12.b Conductores con cargas y cavidades. Apantallamiento electrostático

El estudio del potencial en conductores con cavidades, con o sin carga, es de suma importancia para la comprensión de efectos eléctricos que permiten aplicaciones interesantes entre ellas el más conocido el *apantallamiento electrostático*. Consideremos un conductor de forma arbitraria el cual posee una cavidad de manera que el conductor posee una superficie interna y una externa. La pregunta es, ¿cual será ahora la distribución de la carga en estas superficies cuando existen cargas tanto en la cavidad como en el exterior del conductor?.

Para contestar a esta interrogante comenzamos por colocar en el interior de este conductor un objeto conductor cargado positivamente y aislado¹³. El campo eléctrico producido por este objeto cargado causará efectos eléctricos en el conductor hueco que pueden ser analizados mediante diferentes argumentos electrostáticos. Como primer análisis, las líneas de fuerza producidas por el cuerpo cargado deben obligatoriamente llegar a la superficie interna del conductor hueco pero no pueden penetrar. Así, si las líneas de fuerza terminan allí, se deduce que en esa superficie debe residir una carga negativa equivalente. A esta conclusión se puede llegar también mediante la ley de Gauss. Tomemos una superficie gaussiana S_G en el interior del conductor. Dado que el campo eléctrico debe ser nulo en el interior del conductor, el flujo es nulo y la carga neta encerrada dentro de dicha superficie es nula. Puesto que la carga del objeto es positiva esto implica que la superficie interna debe poseer una carga negativa equivalente. Por último, se puede llegar a esta conclusión por un tercer análisis. El objeto cargado positivamente produce inducción electrostática en el conductor hueco, desde adentro hacia fuera, de manera que una carga negativa se induce en la superficie interna y otra positiva de igual magnitud se induce en la superficie opuesta, en este caso la externa del conductor hueco, como se aprecia en la figura II.2-26a. Por aplicación de la ley de Gauss se deduce que existen campos tanto en la cavidad como en el exterior del conductor. De esta misma ley se demuestra que el cambio en la posición del objeto cargado en el interior de la cavidad no altera la magnitud del

¹³ De lo contrario el cuerpo sería parte del conductor hueco y todo el conjunto sería un solo conductor.

campo eléctrico en el exterior (ver preguntas). Según este fenómeno se dice que el exterior está *apantallado de influencias internas* y consiste en el mismo apantallamiento originalmente observado por Faraday mediante su experimento con la hielera

Si ahora el objeto conductor aislado no posee carga pero existe un campo eléctrico externo proveniente de cargas externas tal como una positiva, actuando sobre el conductor hueco, es obvio que de nuevo tiene lugar una inducción electrostática en el conductor hueco, pero esta vez desde afuera hacia dentro. Se inducen cargas de signo opuesto en las superficies contrarias a la dirección del campo eléctrico como se muestra en la figura II.2-26b, apareciendo una carga negativa en la superficie externa y una positiva en la interna. Experimentalmente y también mediante la ley de Gauss se puede verificar que aun cuando existe un campo externo inductivo no hay campo eléctrico en la cavidad y por lo tanto no ocurre inducción electrostática dentro del objeto conductor aislado. Esto también se puede demostrar matemáticamente (ver problemas). Este fenómeno según el cual la cavidad de un conductor hueco es inafectada por influencia de campos externos se denomina *apantallamiento de influencias externas o desde afuera hacia adentro*. Este efecto sirve para aislar instrumentos sensibles del efecto dañino de la influencia de campos eléctricos externos de forma similar a la caja de Faraday pero netamente más efectivo.

En el capítulo anterior se describió el proceso de carga por contacto, quedando claro que un cuerpo transfiere carga al otro, el primero pierde carga y el segundo gana, pero sin establecer la magnitud transferida. Ahora se discutirá esta situación en conductores mediante el concepto de potencial. Cuando un conductor cargado hace contacto con la parte externa de otro descargado o viceversa, es obvio que debido a la diferencia de potencial existente entre ellos ocurrirá un flujo de electrones desde el cuerpo a menor potencial hacia el de mayor potencial. Este flujo de carga cesará cuando los dos conductores adquieran el mismo potencial. Por el principio de conservación de la carga ésta será compartida entre los dos trayendo como consecuencia que el conductor cargado perderá parte de su carga y el descargado adquirirá esa cantidad. La cantidad de carga que cada conductor adquiere dependerá de su forma geométrica y de la cantidad inicial en el cuerpo cargado y se determina de la condición de igualdad de los potenciales en ellos. Cuando un conductor cargado toca la parte interna de otro cargado o descargado la situación cambia por completo pues, el primero le transfiere toda su carga al segundo independientemente de la carga existente en éste último. Este es el principio de funcionamiento del generador de Van de Graaf (ver problemas).

Cuando se tiene un conjunto de conductores los cuales pueden estar cargados o descargados, el efecto mutuo de la inducción electrostática produce una redistribución de carga cuya determinación es bastante complicada y sólo se puede resolver mediante las ecuaciones de Poisson y Laplace. Sin embargo, aún en estas circunstancias se pueden sacar conclusiones importantes mediante el *teorema de la unicidad* para conductores y el cual establece que:

”En un sistema de n conductores con cargas $q_1, q_2 \dots q_n$; existe una y solamente una manera en la cual la carga se distribuye en los conductores, de manera que el campo sea nulo en el interior de cada uno”.

Este teorema se deriva de la unicidad en la solución de las ecuaciones de Poisson y Laplace, pero también se puede demostrar mediante el principio de superposición lo cual se deja al lector como ejercicio. Su validez la justificaremos de la manera siguiente: Si el teorema no fuese cierto sería posible cargar los conductores de diferentes maneras al colocar las cargas una después de las otras en ordenes diferentes. Este teorema es de

fundamental importancia para la determinación de la capacidad de los conductores en almacenar carga, tal como se presenta en el siguiente capítulo.

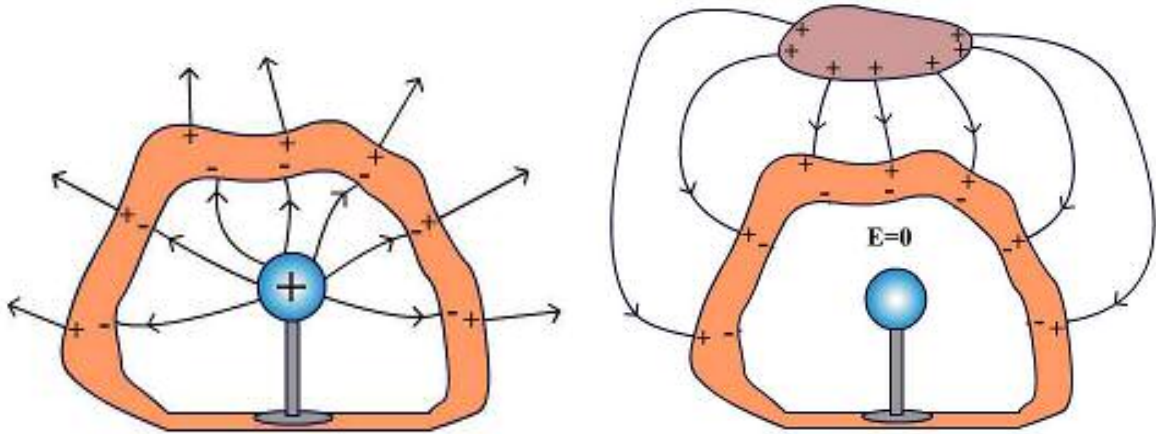
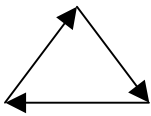


Fig. II.2-26. Apantallamiento electrostático por influencias a) internas b) externas

PREGUNTAS CAPITULO II.2

- 1) ¿Podría usted evaluar el campo eléctrico de una placa no infinita mediante la ley de Gauss?. Explique.
- 2) En la aplicación de la ley de Gauss: a) Si la carga neta es cero, ¿ implica esto que no hay cargas en absoluto, implica esto que el campo es nulo, implica esto que no hay flujo, b) Si el campo es nulo ¿implica esto que el flujo es nulo, implica esto que no hay cargas en absoluto, la carga total es cero?. Responda todo empleando el teorema de Gauss.
- 3) En la sección II.2.7 se dice que el agua impura es un conductor pero el agua pura no lo es, ¿cómo explicaría usted esto?.
- 4) Es recomendable que el tope de los electroscopios sea de forma esférica y nunca de forma puntiaguda, ¿ cómo explica usted esto?.
- 5) Si se dice que un metal posee un elevado número de electrones libres, entonces cómo explica usted que se puede cargar por contacto un metal con carga positiva.
- 6) Un hilo conductor largo, del cual se espera que posea simetría radial en el campo eléctrico, se dobla dándole la forma de un triángulo cómo se muestra en la figura. Dibuje las líneas de fuerza y determine cómo es la densidad de carga en los vértices comparados con los tramos rectos y las puntas.

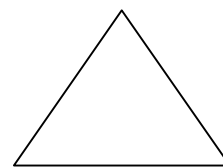


- 7) ¿Puede una línea de fuerza comenzar y terminar en el mismo conductor o en conductores diferentes al mismo potencial?. Justifique y explique su respuesta.
- 8) ¿Puede un cuerpo cargado poseer una carga positiva y un potencial negativo o viceversa?. Explique y cite ejemplos.
- 9) ¿Puede un conductor tener potencial cero y poseer una carga o viceversa?. Explique y cite ejemplos.
- 10) Hacia cuales regiones de potencial (magnitud) se desplazaría una carga a) positiva b) negativa?. Explique y analice empleando el concepto de potencial y trabajo
- 11) ¿Hacia cuales regiones de potencial se desplazan los electrones?. Justifique su respuesta empleándole concepto de potencial.
- 12) En la figura II.1-4 establezca cuales son los signos y magnitudes de los potenciales de las dos esferas en comparación con el potencial del cuerpo cargado a) cuando éste se acerca b) cuando se ha alejado.
- 13) En la figura II.1-5 establezca cual es el signo y magnitud del potencial en los extremos de la barra en comparación con el potencial del cuerpo cargado a) cuando éste se acerca b) cuando se ha alejado. Explique mediante el concepto de potencial porqué los electrones se van a tierra y por el contrario no vienen de tierra.
- 14) Si en la figura II.1-5 acercamos un cuerpo cargado positivamente responda las mismas preguntas anteriores y en particular justifique mediante el concepto de potencial ¿como es el desplazamiento de los electrones, desde tierra o hacia tierra?.
- 15) Sin recurrir a la inducción electrostática y empleando sólo el concepto de potencial explique cada uno de los pasos en cargar un electroscopio al acercar un cuerpo cargado.

- 16) ¿Qué función cumple el casquete metálico del electroscopio?
- 17) A partir de la forma de las líneas del campo, ¿se puede determinar: a) regiones de alto o bajo campo eléctrico, b) regiones de alto o bajo potencial eléctrico, c) signo de las cargas, d) forma del cuerpo cargado?. De ser así ilustre con un ejemplo de lo contrario explique por qué no.
- 18) ¿Cómo cree usted que sería mejor construir la jaula de Faraday: con alambres finos o gruesos?, con alambres redondos, cuadrados o triangulares?
- 19) ¿Cómo justificaría o explicaría usted que el movimiento de un objeto cargado en el interior de la cavidad de un conductor no altera la magnitud del campo eléctrico en el exterior, siempre y cuando éste no toque la cavidad ni varíe su carga?
- 20) Explique o demuestre por qué un conductor descargado al acercarlo a otro cargado siempre disminuye el potencial de éste.
- 21) Describa mediante el concepto de potencial y flujo de carga como un conductor cargado positivamente o negativamente pierde carga al entrar en contacto con otro conductor descargado.
- 22) En el problema #13 ¿por qué el potencial de la esfera interna no es el mismo de la esfera sola, esto es, 2.12×10^{-2} V ?.

PROBLEMAS CAPITULO II.2

- 1) Utilice las ecuaciones II.2-15 y II.2.24 y deduzca la ecuación II.2-23.
- 2) Una carga de $+1 \mu\text{C}$ se encuentra en el centro de un cuadrado de lado 0.2 m el cual posee una carga de $+2 \mu\text{C}$ en cada esquina. Determine el potencial eléctrico en el centro del cuadrado y la energía potencial eléctrica total de la configuración de cargas.
- 3) Para la configuración de cargas positivas discretas de la figura triángulo equilátero de lado $a=0.1 \text{ m}$, determine a) El campo y el potencial eléctrico en el sitio de la carga superior q.b) La energía potencial de la configuración. Tome $q=10 \times 10^{-9} \text{ C}$.



- 4) Un hilo fino de longitud L posee una densidad de carga lineal uniforme λ , determine el campo y el potencial eléctrico producido por el hilo en: a) una distancia R del centro del hilo b) una distancia d de una de las puntas a lo largo del hilo, c) a una distancia D perpendicular a una de las puntas del hilo. Para la solución en la parte (a) a qué expresión se reduce el campo cuando $R \gg L$ y cuando $L \gg R$?. Justifique la respuesta en base a lo esperado Físicamente.
- 5) Dos hilos infinitos y paralelos que poseen densidades de carga lineal $+\lambda$ y $-\lambda$ están separados a una distancia $2R$, determine el campo eléctrico en un punto P a una distancia r radial arbitraria desde uno de los hilos.
- 6) Un anillo muy fino de radio R es cargado tal que adquiere una densidad de carga lineal uniforme λ sobre todo su perímetro. Calcule el potencial eléctrico en un punto: a) a una distancia Z_0 del centro a lo largo del eje. ¿A qué se reduce la expresión cuando $R \gg Z_0$, $Z_0 \gg R$ y $Z_0=0$ o $R=0$?. Explique por qué todas estas soluciones son Físicamente razonables.
- 7) Calcule el vector campo eléctrico y el potencial eléctrico producido por un anillo semicircular (anillo cortado a la mitad diametralmente) no-conductor de radio $R=10 \text{ cm}$, el cual posee una carga total de $-\pi \mu\text{C}$, en: a) el centro b) a una distancia de 20 cm como se muestra en la figura.
- 8) Una tira de espesor despreciable longitud L y anchura d es cargada con una densidad de carga superficial σ . Calcule el vector campo eléctrico y el escalar potencial eléctrico en un punto P ubicado a) una distancia Z_0 perpendicularmente al centro de la tira b) a una distancia Z_0 perpendicularmente al centro de un extremo, c) a una distancia Y_0 de uno de los extremos a lo largo del plano de la tira.
- 9) Determine el campo y el potencial eléctrico de un disco de espesor despreciable, de radios interno a y externo b y con una carga total Q en su superficie, a una distancia d del centro del disco a lo largo del eje.
- 10) Un cilindro metálico hueco de espesor despreciable radio R y longitud L posee una densidad de carga superficial σ . Determine el vector campo eléctrico a una distancia Y_0

de uno de los extremos y a lo largo del eje del cilindro. A partir de esta expresión determine el potencial eléctrico.

- 11) Utilice la ley de Gauss para determinar el campo en las regiones I, II y III de la configuración de cargas de la figura consistente de dos cascarones esféricos no-conductores de radios R_1 y R_2 y densidades de carga $+\rho_1$ y $-\rho_2$ respectivamente.
- 12) La configuración de cargas de la figura consiste de dos cilindros aislantes concéntricos muy largos, el cilindro interno es macizo y posee una densidad de carga $-\lambda$ y un radio a , el cilindro externo es hueco y posee una densidad de carga $+\lambda$ y radios interno b y externo c respectivamente. Utilice la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico en las regiones: I ($r < a$), II ($a < r < b$), III ($b < r < c$), IV ($r > c$).
- 13) Se tienen dos cascarones esféricos concéntricos metálicos y muy delgados. El interno de 5 cms de radio posee una densidad de carga de -15 pC/cm^2 . El externo de 20 cms de radio es conectado a tierra. Determine mediante la ley de Gauss el campo eléctrico a 10 y 30 cms del centro. Calcule el potencial de la esfera interna y la magnitud de la diferencia de potencial entre las dos esferas. Resp.: 0.424 V/m , cero, $-6.36 \times 10^{-4} \text{ V}$, $+6.36 \times 10^{-4} \text{ V}$.
- 14) En las esferas del problema anterior la esfera interna se conecta a tierra y una diferencia de potencial de 3 V se aplica entre las dos esferas. ¿Cuánta carga hay en la esfera interna?. Resp.: 37 pC
- 15) Una esfera conductora es colocada en un campo eléctrico uniforme. Dibuje las líneas del campo eléctrico alrededor de la esfera y alejándose de ella.
- 16) Determine el potencial eléctrico en las regiones I, II y III de los cascarones esféricos del problema # 11.
- 17) Determine el potencial eléctrico en las regiones I, II y III de los cilindros concéntricos del problema # 12.
- 18) Dos cilíndricos metálicos de radio R son tan largos que se puede considerar que su carga se distribuye en su superficie con una densidad de carga lineal por unidad de longitud λ , positiva uno y negativa el otro. Los cilindros se encuentran paralelos uno al otro y separados por una distancia d desde sus periferias como se muestra en la figura. Si suponemos que la distribución de carga en uno no modifica la del otro, determine mediante la superposición de campos (ec. II.2-77c) o de potencial eléctrico (ec. II.2-90):
 - a) La diferencia de potencial desde un punto P a una distancia radial r del centro del cilindro con densidad de carga $+\lambda$ a lo largo de la línea que une los centros de los cilindros hasta éste cilindro.
 - b) La diferencia de potencial entre los cilindros
 Repita la parte b) cuando la distancia $d \gg R$ tal que una carga no influye la otra y el principio de superposición no es aplicable, es decir, los cilindros son independientes.
 Resps.:

$$\Delta\varphi_{r \rightarrow +\lambda} = \frac{K_0 \lambda}{2} \text{Ln} \left[\frac{(d+R)r}{(d+2R)R} \right] \quad \Delta\varphi_{-\lambda \rightarrow +\lambda} = K_0 \lambda \text{Ln} \left[1 + \frac{d}{R} \right]$$

- 19) En dos esferas metálicas de radio R se colocan cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente. Las esferas se encuentran separadas por una distancia d desde sus periferias como se muestra en la figura. Si suponemos que la distribución de carga en una no modifica la

de la otra, determine mediante la superposición de campos (ec. II.2-77c) o de potencial eléctrico (ec. II.2-90):

a) La diferencia de potencial desde una distancia radial r a lo largo de la línea que une los centros de las esferas hasta la esfera con carga $+Q$.

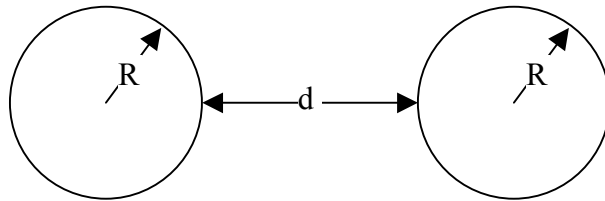
b) La diferencia de potencial entre las esferas

Repita la parte b) cuando la distancia $d \gg R$ tal que una carga no influye la otra y el principio de superposición no es aplicable, es decir, las esferas son independientes .

Resps.:

$$\Delta\varphi_{r \rightarrow +Q} = \frac{K_0 Q}{R} - \frac{K_0 Q}{d+R} + \frac{K_0 Q}{r} - \frac{K_0 Q}{d+2R-r} \quad \Delta\varphi_{-Q \rightarrow +Q} = 2\frac{K_0 Q}{R} - 2\frac{K_0 Q}{d+R}$$

$$\Delta\varphi_{-Q \rightarrow +Q} = \frac{2 K_0 Q}{R}$$



- 23) Demuestre el principio de funcionamiento del generador de Van de Graaf: “Cuando un conductor cargado (colector de la correa) dentro de otro cargado y hueco (esfera,) toca su parte interna éste recibe toda la carga del primero independientemente de la carga existente en el conductor hueco”.
- 24) Un generador de Van de Graaf cuya esfera posee un radio de 20 cms se carga hasta una diferencia de potencial correspondiente al campo para el rompimiento eléctrico del aire. Determine a) la carga máxima en *ues* que puede adquirir la esfera, b) la densidad de carga c) se toca la esfera con otra de 4 cm de radio montada sobre un mango aislante, ¿cuál es la carga y el potencial en las esferas justo al momento de separarlas?. Resp.: a) 0.2 Mues, b) 40 ues/cm², c) 0.167 Mues, 33.3 kues, 8.33 kStatV
- 25) A una cuenta metálica (perdigón perforado diametralmente) de masa m montada en un eje vertical aislante, se le coloca una carga de $+10 \mu\text{C}$ y se deja caer desde una altura de 50 cm sobre otra cuenta fija cargada con $+100 \text{ nC}$. Determine la masa mínima para que la cuenta pueda caer. Si la masa de la cuenta es de 9 gr, calcule la distancia mínima de acercamiento de las cuentas. Si la cuenta inferior es libre de desplazarse, determine las condiciones para que una alcance a la otra. Resp.: 1.8 gr, 12.2 cm.
- 26) En un experimento de Rutherford para la determinación de la estructura del átomo se dispara una partícula alfa¹⁴ desde una gran distancia a una velocidad de $3 \times 10^4 \text{ Km/s}$ hacia un blanco consistente de láminas delgadas de oro. La partícula alfa penetra la nube electrónica y se acerca de frente al núcleo hasta una distancia mínima, para luego salir rebotando en la misma dirección. Determine la distancia mínima de acercamiento entre la partícula alfa y el núcleo de Oro. ¿Qué velocidad mínima sería necesaria para que la partícula alfa golpee al núcleo?. No tome en cuenta efectos relativísticos.
Resp.: $1.2 \times 10^{-12} \text{ cm}$,
- 27) ☼ Demuestre que si un conductor cargado se coloca cerca de otro conductor conectado a tierra, los dos conductores tendrán cargas de signo opuesto y de un solo tipo solamente.

¹⁴ Una partícula alfa es equivalente a un átomo de Helio doblemente ionizado.

- 28) ☼ Demuestre que a un conductor aislado dentro de la cavidad de otro conductor no le puede ocurrir inducción electrostática.
- 29) ☼ Demuestre el teorema de la unicidad mediante el principio de superposición.
- 30) ☼ De dos maneras diferentes, pruebe el teorema de Earnshaw, el cual establece que:
“*El potencial no puede tener ni máximo ni mínimo en un punto del espacio libre, es decir, desprovisto de carga*”.
- 31) ☼ Como consecuencia del teorema *de Earnshaw* demuestre los siguientes corolarios interrelacionados:
- a) Si en un punto del espacio el potencial es máximo, entonces este punto debe estar ocupado por una carga positiva.
 - b) Si en un punto del espacio el potencial es mínimo, entonces este punto debe estar ocupado por una carga negativa.
 - c) Una carga aislada no puede estar en equilibrio estable bajo la acción de fuerzas electrostáticas solamente.
- 32) ☼ Muestre o justifique como al introducir un conductor en un campo eléctrico disminuye la energía total del sistema.