Potencial Eléctrico

Energía Electrostática

La interacción electrostática es representada muy bien a través de la ley de Coulomb, esto es: mediante fuerzas. Existen, sin embargo, otras formas de representar dicha interacción, como por ejemplo a través de los conceptos de trabajo y energía. La idea de que la energía almacenada (interna) de un sistema es una cantidad asociada al estado del mismo nos resulta cómoda para representar la interacción electrostática.

La figura 15 muestra una configuración formada por dos cargas: $\boldsymbol{q_1}$ y $\boldsymbol{q_2}$, situadas en las posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Supongamos que para establecer dicho sistema se "arrastró" la carga $\boldsymbol{q_2}$ desde la posición $\vec{r}'$ hasta la posición $\vec{r}_2$, mediante un proceso cuasi-estático (con velocidad constante y v→0).

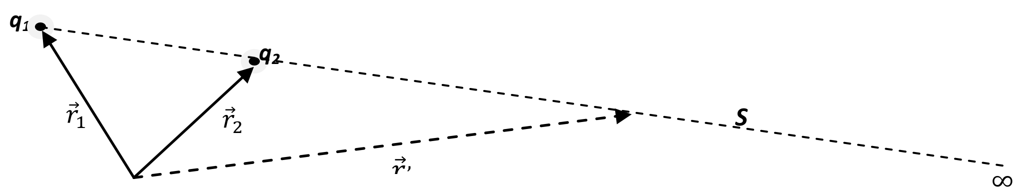


Fig. 15 dos cargas interactuando

En este proceso podemos afirmar que el trabajo total sobre la partícula es cero (0) y que por lo tanto el trabajo hecho por el agente externo $\boldsymbol{W_{ex}}$, con el cual se introduce energía al sistema, es igual, pero de signo contrario, al trabajo hecho a través de la fuerza de Coulomb $\boldsymbol{W_{FC}}$.

$$W_{ex} + W_{FC} = 0 \tag{30}$$

Ya que no existe disipación de energía (el sistema no radia ni pierde energía por algún otro mecanismo), se puede concluir que la energía aportada por el agente externo es sustraída, y almacenada en el sistema, por la fuerza "*coulombiana*", lo cual pone de manifiesto el carácter conservativo de la fuerza electrostática. Evidentemente se le puede asociar un valor de energía U_{12} a la configuración final, la cual estará dada por

$$U_{12} = U_0 + \Delta U \tag{31}$$

Donde U_0 corresponde a la energía asociada a la configuración inicial y ΔU es la cantidad de energía que se le suministra al sistema para "llevarlo" a la configuración final. El valor inicial de energía resulta arbitrario y no puede ser calculado en forma absoluta. Esta inconveniencia puede ser solventada al asignar un valor de energía a alguna configuración específica la cual será tomada como referencia. Así, bastará con calcular el gasto de energía para llevar el sistema, bajo un proceso cuasi-estático, desde dicha referencia hasta la configuración actual. Conviene, puntualizar que dado que el campo electrostático es conservativo solo interesa para el cálculo los estados inicial y final. Generalmente, aunque no siempre es conveniente, se toma como referencia aquella configuración en la cual las cargas están infinitamente alejadas y a esta configuración se la asocia el valor cero (0) de energía. Bajo esta condición la ecuación (30) puede reducirse a

$$U_{12} = \Delta U \tag{32}$$

En este caso ΔU corresponde al incremento de energía suministrado al sistema para mover la carga $\boldsymbol{q_2}$ hasta la posición $\vec{r}_2$ en presencia de la carga $\boldsymbol{q_1}$ en posición $\vec{r}_1$ (o mover $\boldsymbol{q_1}$ hasta la posición actual, en presencia de $\boldsymbol{q_2}$). Para obtener ΔU, basta con calcular el trabajo hecho por el agente externo, como ya sabemos

$$W_{ex} = \Delta U$$

Así encontramos que

$$\Delta U = -W_{FC} = W_{ex} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_2} \frac{dl}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,'|^2} \tag{33}$$

En esta ecuación dl corresponde a un elemento de camino, ya que el trabajo para una fuerza conservativa debe ser independiente de la trayectoria, se toma la más simple, en este caso la trayectoria "S" mostrada en la figura. De esta manera se identifica

$$dl = -dS$$

Por otra parte, $\vec{r}\,'$ es una posición intermedia (arbitraria) de la carga $\boldsymbol{q_2}$, sobre la trayectoria, por lo tanto se puede escribir

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}\,'| \equiv S'$$

De esta forma se obtiene

$$\Delta U = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{dS'}{S'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{34}$$

Entonces, bajo la condición $U_\infty \equiv 0$, encontramos que la energía de configuración para dos cargas es

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{35}$$

Este resultado puede ser usado para hallar la energía asociada a un conglomerado de N cargas, considerando un proceso donde las cargas son arrastradas una por una hasta formar el sistema. Se encuentra que la primera carga, es traída a la posición $\vec{r}_1$ a través del espacio, libre de campo, sin ningún esfuerzo y por lo tanto el trabajo es nulo.

$$\Delta U_1 = 0$$

Sin embargo, la segunda carga es empujada hasta la posición $\vec{r}_2$, a través del campo generado por la primera carga y la energía asociada está dada por la ecuación (3)

$$\Delta U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

La tercera carga es transportada en presencia de las dos primeras y el gasto de energía es entonces

$$\Delta U_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\right]$$

Para la cuarta carga se encuentra

$$\Delta U_4 = \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|} + \frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|}\right]$$

En general, se encuentra para la j-ésima carga

$$\Delta U_j = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{36}$$

Y por ser la energía una cantidad extensiva se encuentra

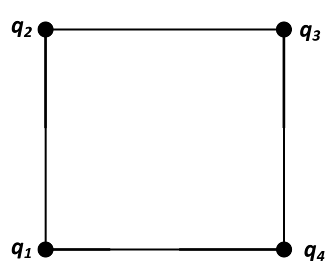
$$U_{Total} = \sum_{j=1}^{N}\Delta U_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{q_j q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{37}$$

La ecuación (37) representa la energía que se gasta al formar un sistema de N cargas, dicha energía queda almacenada en el sistema. Por su parte, (36) representa la energía de interacción de una carga *q,* en la posición $\vec{r}$, con un conglomerado de *n* cargas, puede rescribirse como

$$U_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} \tag{38}$$

Problema

Cuatro cargas de igual valor ($q = 2.0x10^{-5}C$), están distribuidas en los vértices de un cuadrado de lado $l = 1.0\ cm$. ¿Qué cantidad de energía hay almacenada en el sistema?



Solución

Para hallar este valor usamos la expresión (37), en este caso con $N = 4$ y todas las cargas de igual valor.

Se encuentra

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=2}^{4}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{q_j q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Así, al desarrollar se obtiene

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + q_3\left(\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\right) + q_4\left(\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|} + \frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|}\right)\right]$$

De la figura, vemos que

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l;\ |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = \sqrt{2}l;\ |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = l$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_4| = l;\ |\vec{r}_2 - \vec{r}_4| = \sqrt{2}l;\ |\vec{r}_3 - \vec{r}_4| = l$$

$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\left[4 + \sqrt{2}\right]$$

Sustituyendo los valores se encuentra

$$U \cong 9.0x10^9\frac{N\,m}{C^2}4.0\,x10^{-10}C^2 10^2 m^{-2}\left(4 + \sqrt{2}\right)$$

$$U \cong 1949\,joul$$

Potencial Eléctrico

La ecuación (38) nos da el valor de energía de configuración del sistema relacionado a las diferentes posiciones de q_0. Al igual que en el caso del campo eléctrico, es posible atribuirle propiedades al espacio como consecuencia de la influencia de las cargas sobre éste y describirlo asociándole una función de la forma

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} \qquad (39)$$

La función descrita en (39), se conoce como **potencial eléctrico** y representa la energía potencial por unidad de carga, asociada a cada punto del espacio, debida a un grupo de n cargas. En el caso de una sola carga q_f, ubicada en la posición $\vec{r}_f$, la ecuación (39) se reduce a

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_f}{|\vec{r} - \vec{r}_f|} \qquad (40)$$

A partir de esta función puede obtenerse el valor de energía de configuración al colocar una carga q en una determinada posición $\vec{r}$

$$U = q\varphi(\vec{r}) \tag{41}$$

La diferencia de energía, entre dos posiciones ($\vec{r}_1 \; y \; \vec{r}_2$) de la carga q, se puede calcular fácilmente a través de la forma

$$\Delta U = q[\varphi(\vec{r}_2) \; - \varphi(\vec{r}_1)] \equiv qV \tag{42}$$

Siendo V la diferencia de potencial entre ambos puntos, definida como

$$V \equiv \; \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} \vec{E}.\overrightarrow{dl} \tag{43}$$

Representando el trabajo por unidad de carga realizado por la fuerza electrostática cuando una carga positiva es trasladada desde la posición $\vec{r}_1$ hasta la posición $\vec{r}_2$. En la expresión (43) se ha usado el hecho que la fuerza electrostática (y por lo tanto el campo) es conservativa y en consecuencia el trabajo hecho por ésta es igual a “menos” la variación de energía, ecuación (33).

Si se asigna el cero de energía a posiciones infinitamente alejadas, entonces es fácil obtener a partir de (43) la forma

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U}{q} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\,.\overrightarrow{dl} \tag{44}$$

Correspondiendo a una definición alternativa para el potencial, como el trabajo por unidad de carga que hace el campo eléctrico cuando se mueve una carga positiva desde infinito hasta el punto $\vec{r}$.

Potencial eléctrico para una distribución continua de cargas

Al considerar nuevamente cargas esparcidas sobre alguna región del espacio debemos mantener en mente que aún cuando dicha carga está “cuantizada”, puede ser tratada como una distribución continua debido a que la carga fundamental (la carga del electrón) es lo suficientemente pequeña, en la descripción macroscópica, que este aspecto puede ser pasado por alto. En este caso es válido sustituir las cargas puntuales por elementos de cargas

$$q_i \rightarrow dq$$

De esta forma la ecuación (39) pasa a la forma

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{45}$$

Como antes, la integral se toma sobre la toda carga (Q), mientras que

$$dq = \begin{cases} \lambda dl \ \ para\ una\ distribución\ lineal \\ \sigma ds \ \ para\ una\ distribución\ superficial \\ \rho dV\ para\ una\ distribución\ volumétrica \end{cases}$$

Donde $\lambda, \sigma\ y\ \rho$ corresponden a las densidades de cargas lineal, superficial y volumétrica, respectivamente. En término de estas variables (45) es escrita como

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{Línea} \frac{\lambda(\vec{r}')dl}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{46}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{Superficie} \frac{\sigma(\vec{r}')ds}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{47}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{Volumen} \frac{\rho(\vec{r}')dV}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{48}$$

Las expresiones (39), (40), (46), (47) y (48) permiten el cálculo del potencial a partir de una distribución de cargas (discreta o continua). Por su parte, mediante la ecuación (44) se puede obtener el potencial a partir del conocimiento del campo eléctrico. La transformación inversa es también posible: conocido el potencial se puede determinar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio. De la ecuación (43) se obtiene que

$$d\varphi = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

En coordenadas cartesianas se tiene

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

Por otro lado, encontramos

$$\vec{E}.\overrightarrow{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Identificando los términos en ambas ecuaciones se encuentra

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \tag{49}$$

Así se puede escribir

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \equiv -\nabla\varphi = -grad(\varphi)$$

Bajo esta forma se entiende que si se conoce el potencial, en todos los puntos del espacio, se puede obtener el campo como “menos” en gradiente de éste. Nótese que el sentido del campo es contrario a la variación del potencial (se dirige hacia donde disminuye). Por otro lado, se desprende de las ecuaciones (49) que si en una región el potencial es constante entonces el campo es nulo en dicha región (y viceversa).

$$\varphi = constante \ \rightarrow \ \vec{E} = 0$$

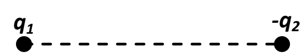
Estas regiones se conocen con el nombre de regiones equipotenciales, y se caracterizan por que todos sus puntos se encuentran a un mismo potencial.

Tabla comparativa de los dos enfoques de la electrostática

	Fuerza y Campo Eléctrico	Energía y Potencial Eléctrico
Interacción	$\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{\lvert\vec{r}_2 - \vec{r}_1\rvert^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$	$U_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{\lvert\vec{r}_2 - \vec{r}_1\rvert}$
Campo por una carga	$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\lvert\vec{r} - \vec{r}_q\rvert^3}(\vec{r} - \vec{r}_q)$	$\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\lvert\vec{r} - \vec{r}_q\rvert}$
Sistema de N cargas	$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{q_i}{\lvert\vec{r} - \vec{r}_i\rvert^3}(\vec{r} - \vec{r}_i)$	$\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{q_i}{\lvert\vec{r} - \vec{r}_i\rvert}$
Sistema continuos	$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{RC}\dfrac{dq}{\lvert\vec{r} - \vec{r}_i\rvert^3}(\vec{r} - \vec{r}_i)$	$\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{RC}\dfrac{dq}{\lvert\vec{r} - \vec{r}_i\rvert}$
Transformación	$\vec{E} = -\nabla\varphi$	$\varphi = -\int_{\infty}^{\vec{r}}\vec{E}.d\vec{l}$

Problemas

1.- Suponga dos cargas, q_1 y $-q_2$, separadas una distancia l, como se muestra en la figura. En qué punto, sobre la línea que las une y medido a partir de la carga q_1, se anula el potencial.



Sol.

La ecuación (39) permitirá dar solución a este planteamiento

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i}{\lvert\vec{r}_i - \vec{r}\,\rvert}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\lvert\vec{r}_1 - \vec{r}\,\rvert} + \frac{q_2}{\lvert\vec{r}_2 - \vec{r}\,\rvert}\right)$$

Tomando el origen sobre q_1, la ecuación anterior se escribe como

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{l - x}\right)$$

Donde x es la distancia, a partir de q_1, donde se anula el potencial, lo cual conduce a la siguiente expresión

$$q_1(l - x) = q_2 x$$

Siendo el resultado

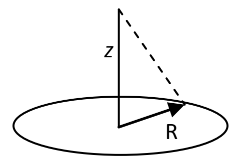
$$x = \frac{q_1}{q_1 + q_2} l$$

Nótese, de este resultado, que si las cargas tienen el mismo valor ($|q_1| = |q_2|$), entonces

$$x = \frac{l}{2}$$

el potencial se anula justo en el medio de ambas cargas.

2.- Sobre un anillo, de radio R se distribuye uniformemente una carga Q. ¿Cuál es el potencial sobre el eje del anillo a una distancia *z* del centro?



Solución

El potencial en esta situación puede obtenerse a partir de la expresión (46). En este caso se tiene que la densidad lineal de cargas es constante

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{anillo} \frac{dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Como se puede apreciar de la figura

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Para efectos de la integral esta cantidad es constante, con lo cual

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} \int_{anillo} dl = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

De acuerdo a este resultado, el máximo se consigue en $z = 0$

$$\varphi(z = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Por otro lado, para puntos muy alejados del centro ($z \gg R$),

$$\frac{R}{z} \ll 1$$

Con lo que se obtiene

$$\varphi(z) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z}$$

Lo que significa que para puntos muy alejados el potencial tiende a comportarse como el de una carga puntual.

Dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico es un sistema rígido, constituido por dos cargas de igual valor pero de signo contrario separadas por una corta una distancia. En la naturaleza son muchos los elementos que pueden ser considerados dipolos eléctricos, por ejemplo: la molécula de agua, que es un sistema eléctricamente neutro, pero con las cargas (positivas y negativas) ligeramente separadas, puede describirse como un dipolo, muchas moléculas o agregados de éstas pueden ser considerados como verdaderos dipolos puntuales. Estas entidades presentan una característica tal que aún cuando son elementos eléctricamente neutros son fuentes de campo eléctrico.

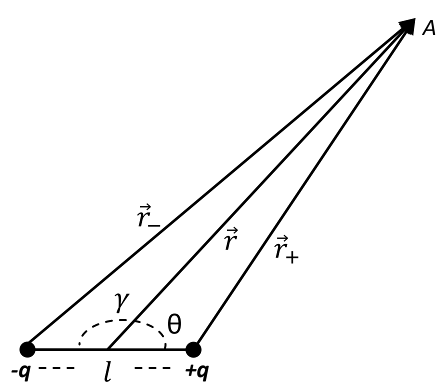


Fig. 16 Dipolo eléctrico de cargas ***q*** y ***–q*** separadas una distancia l

La figura 16 muestra un dipolo con cargas q y $-q$, separadas una distancia l. Estos sistemas se pueden identificar por el momento dipolar p, el cual se define como el producto de la carga q por la separación

$$p \equiv ql \tag{50}$$

Potencial debido a un dipolo

Suponga que en la situación de la figura 16 se quiere calcular el potencial en el punto "A". Para hacer esto se puede partir de la ecuación (39), tomando el origen en la carga negativa se encuentra

$$\varphi(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{1}{|\vec{r}_-|}\right)$$

Donde $|\vec{r}_+|$ y $|\vec{r}_-|$ corresponden, a la distancia de la posición "A" a la carga positiva y negativa respectivamente. Ambas pueden escribirse en términos de $|\vec{r}|$, que representa la distancia del punto medio a la posición A. De la figura se puede ver que

$$|\vec{r}_+| = r_+ = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\cos\,\theta} \quad \text{y} \quad |\vec{r}_-| = r_- = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} + rl\cos\,\theta}$$

En las que se ha utilizado el teorema del coseno y el desarrollo trigonométrico $\cos(\gamma - \theta) = -cos\theta$. Ambas expresiones pueden rescribirse como

$$r_+ = r\sqrt{1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r}cos\,\theta} \qquad \text{y} \qquad r_+ = r\sqrt{1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r}cos\,\theta}$$

Así se encuentra

$$\varphi(A) = \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r}cos\,\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r}cos\,\theta}}\right)$$

Los dipolos que conforman la materia son de dimensiones muy pequeñas en comparación a las distancias que se sugieren en el punto de vista macroscópico y podemos asegurar, en este ámbito, que cualquiera que sea la posición en la cual se desea calcular el potencial se cumplirá la condición

$$r \gg l \ \rightarrow \frac{l}{r} \ll 1$$

En una aproximación de primer orden (muy conveniente en esta condición) se estable

$$\frac{l^2}{r^2} \rightarrow 0$$

Lo que está afirmando que la cantidad $\frac{l^2}{r^2}$ es tan pequeña que puede usarse como un cero (0), en esta aproximación, manteniendo evaluable las aproximaciones de primer orden $\frac{l}{r}$.

En esta aproximación se puede escribir el potencial en la forma

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{l}{r}\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{l}{r}\cos\theta}}\right)$$

Ahora bien, sabemos que cualquier función derivable n veces puede ser expandida bajo una serie de Taylor en la forma

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x)|_{x_0}\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)|_{x_0}\Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(x)|_{x_0}\Delta x^n$$

(con la condición $\Delta x \ll x_0$.)

Con esto se encuentra que, en una aproximación de primer orden, se puede escribir

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{l}{r}\cos\theta}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{l}{r}\cos\theta$$

Y

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{l}{r}\cos\theta}} \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{l}{r}\cos\theta$$

Y la expresión para el potencial se reduce a

$$\varphi(r) = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Utilizando (50) se tiene

$$\varphi(r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (51)$$

Nótese en (51) que

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(r) = 0$$

lo que significa que el potencial de todos los puntos del plano perpendicular al dipolo, que pasa justo por la mitad de éste, es nulo. Este es un caso particular de una superficie equipotencial.

Campo eléctrico debido a un dipolo

Para calcular el campo generado por un dipolo se puede partir de la ecuación (51) escrita en coordenadas cartesianas. Para mayor simplicidad se puede restringir al plano "$x\,,y$ " (la extensión a tres dimensiones es inmediata), de esta forma

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Suponemos además que el dipolo está alineado en la dirección "x" de lo cual se deduce

$$cos\theta = \frac{x}{r}$$

Finalmente el potencial se escribe como

$$\varphi(x, y, x) = \frac{px}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En esta expresión el origen es localizado en el dipolo.

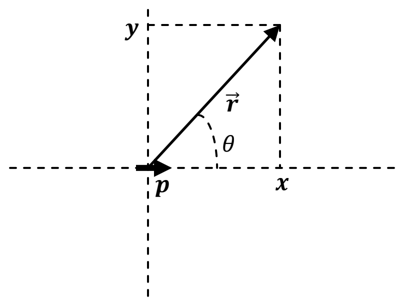


Fig. 17 Dipolo eléctrico sobre la coordenada horizontal (x)

Usando ahora (49), se encuentra

$$E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\frac{x^2}{r^2} - 1\right) \tag{52}$$

$$E_y = \frac{pxy}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \tag{53}$$

En la extensión a tres dimensiones se obtiene

$$E_z = \frac{pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \tag{54}$$

De (52), (53) y (54) se desprende que cuando $y = 0$ y $z = 0$ el campo sólo presenta componente horizontal independiente del valor x. Igualmente sucede cuando $x = 0$, pero en este caso el campo se presenta en sentido contrario. En general se encuentra que el campo es paralelo al dipolo sobre la línea que lo contiene y es anti-paralelo para los puntos que están sobre la superficie perpendicular a éste en su punto medio (el sentido del dipolo es tomado de la carga negativa a la positiva).

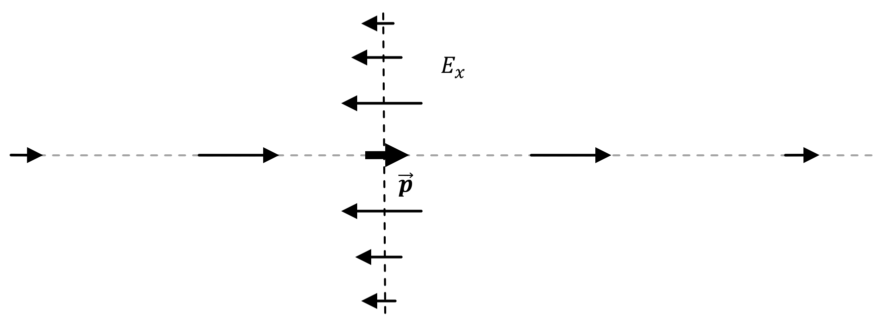


Fig. 18 Componente horizontal del campo eléctrico de generada por un dipolo orientado en la coordenada (x)

Problemas propuestos

1. Cuatro cargas (todas de valor *q=3,0x10^{-5}C*) están distribuidas equidistantemente a lo largo de una línea recta, si la separación entre las cargas es *l=10,0 cm*, ¿cuál es la energía almacenada en dicha configuración?

   a)U=0,351 joul *b) U=35,1 joul* *c) U=351 juol* *d) Ninguno de éstas*

2. En un experimento se requiere acercar dos cargas (*q_1=3,0x10^{-5}C* y *q_2=1,5x10^{-5}C*), que originalmente están separadas *25 cm,* a una distancia de *2,0 cm.* El trabajo mínimo que se debe hacer para realizar este procedimiento es

   a) $W \cong 710$ *joul* *b)* $W \cong 71{,}0$ *joul* *c)* $W \cong 0{,}71$ *juol* *d) Ninguno de éstas*

3. Suponga una pirámide de altura h y de lado l, en su base cuadrada. En cada uno de los vértices de la base se coloca una carga de valor *q.* Si $h = \sqrt{2}l$ se tiene que el potencial en el vértice superior es

   a) $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{l}$ *b)* $\varphi = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{q}{l}$ *c)* $\varphi = \frac{1}{\pi\epsilon_0}\frac{q}{l}$ *d) Ninguno de éstos*

4. En el sistema de la pregunta anterior, se tiene que el potencial en el centro de la base es

   a) $\varphi = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{q}{l}$ *b)* $\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0}\frac{q}{l}$ *c)* $\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0}\frac{q}{l}$ *d) Ninguno de éstos*

5. Sobre un hilo, de longitud l, se distribuye uniformemente una carga *Q*. Así el potencial para puntos sobre la mediatriz a una distancia h es

   a)$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} ln\frac{\sqrt{4h^2+l}}{\sqrt{4h^2}-l}$ *b)* $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\ \frac{\sqrt{4h^2+l}}{\sqrt{4h^2}-l}$ *c)* $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$ *d) otro valor*

6. Se tienen dos anillos concéntricos cargados, con igual densidad de cargas λ, y de radios R_1 y R_2 (con $R_2=2R_1$). Se encuentra que el potencial en el centro de este sistema está dado por

   a) $\varphi = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$ b) $\varphi = 2\frac{\lambda}{\varepsilon_0}$ c) $\varphi = 0$ d) Ninguno de éstos

7. Suponga una banda circular, de radios R_1 y R_2, cargada con densidad uniforme σ. Se encuentra que el potencial en el centro es

   a)$\varphi = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}[R_2 + R_1]$ b) $\varphi = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}[R_2 - R_1]$ c) $\varphi = 0$ d) Ninguno de éstos

8. Una esfera, de radio *R*, se carga hasta que adquiere una densidad uniforme ρ. Se encuentra que el potencial en los puntos interiores a la esferas, situados en *R/2* es

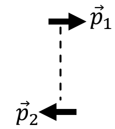
   a)$\varphi = \frac{11}{24\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ b) $\varphi = \frac{11}{32\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ c) $\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ d) Ninguno de éstos

9. En una región del espacio existe un potencial de la forma $\varphi = -\alpha x^2 + \beta x$, donde $\alpha\ y\ \beta$ son constantes. Si el campo eléctrico se anula en $x = a$, entonces se encuentra que la relación entre $\alpha\ y\ \beta$ es

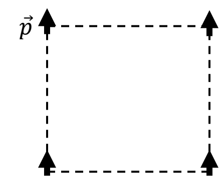
   a)$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{a}$ b) $\frac{\alpha}{\beta} = 2a$ c) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{a}$ d) Ninguna de éstas

10. Suponga un dipolo eléctrico formado por cargas $q = \pm 3{,}0x10^{-12}C$ separados una distancia $l = 0{,}1\ mm$. El potencial a una distancia $d = 2{,}0\ cm$ sobre la misma línea es
    a)$\varphi = 67{,}5$ mV b) 6,75 mV c) 675 mV d) otro valor

11. La figura muestra dos dipolos separados una distancia d y dispuesto en forma anti-paralela. El potencial en el punto medio es
    $a)$ $\varphi = \frac{p_1+p_2}{2\pi\varepsilon_0 d}$ b) $\varphi = \frac{p_1-p_2}{2\pi\varepsilon_0 d}$ c) $\varphi = 0$ d) ninguno de éstos



12. En los vértices de un cuadrado de lado l se disponen cuatro dipolos de igual momento p, tal como se muestra en la figura. El potencial en el centro es
    $a)$ $\varphi = \frac{p}{\pi\varepsilon_0 l^2}$ b) $\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$ c) $\varphi = 0$ d) ninguno de éstos



13. Si en la situación de la pregunta anterior se invierten los dipolos de los vértices superiores, el potencial en el centro será ahora
    $a)$ $\varphi = \frac{p}{\pi\varepsilon_0 l^2}$ b) $\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$ c) $\varphi = 0$ d) ninguno de éstos